Lycée Galilée Gennevilliers

Oscillations mécaniques

chap. 10

Jallu Laurent

I. Présentation d'oscillateurs libres 2

1. Le pendule simple 2
   - Définition 2
   - La période du pendule simple 2
2. Le pendule élastique 3
   - Définition 3
   - La période du pendule élastique 3
3. Les oscillations mécaniques 4

II. Dynamique du pendule 4

1. Le pendule simple 4
   - Équation d'évolution temporelle du mouvement (équation différentielle) 4
   - Évolution temporelle du pendule 6
2. Le pendule élastique 7
   - Équation d'évolution temporelle du mouvement 7
   - Évolution temporelle du pendule 8

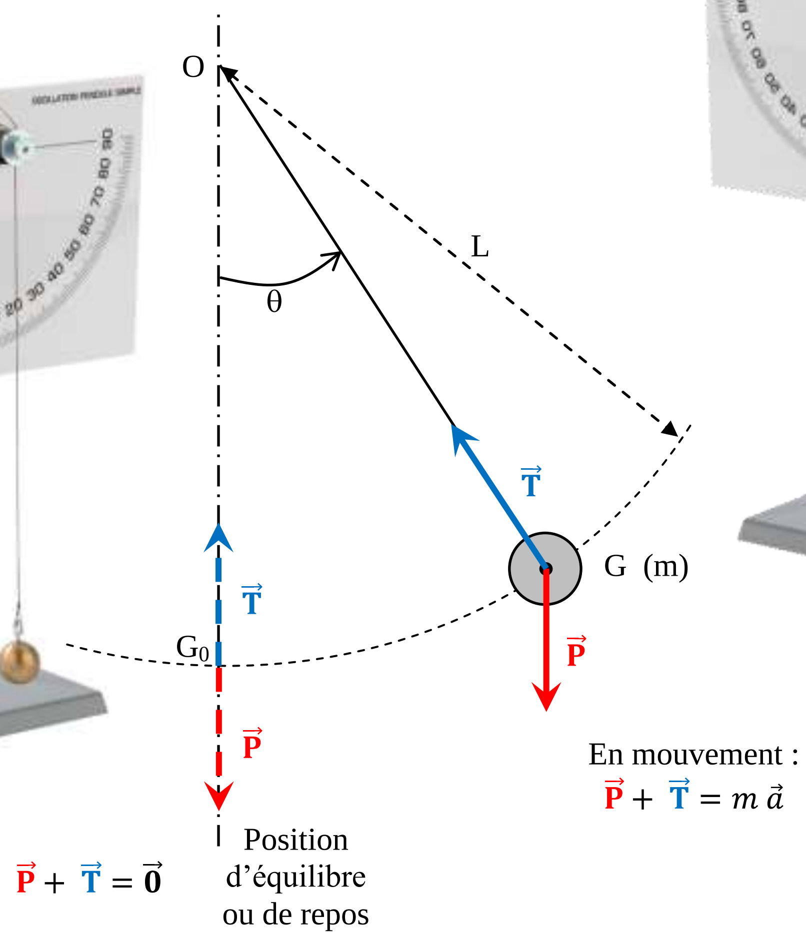
III. Amortissements et oscillations forcées 10

1. L'amortissement 10
2. L'oscillation forcée 11

Oscillations mécaniques
Des pendules simples et élastiques

I. Présentation d'oscillateurs libres

1. *Le pendule simple*



➢ Définition

Un pendule simple est le modèle physique d'une masse « m » suspendue à un fil inextensible de masse négligeable qui oscille lorsqu'elle est écartée de sa position verticale d'équilibre.

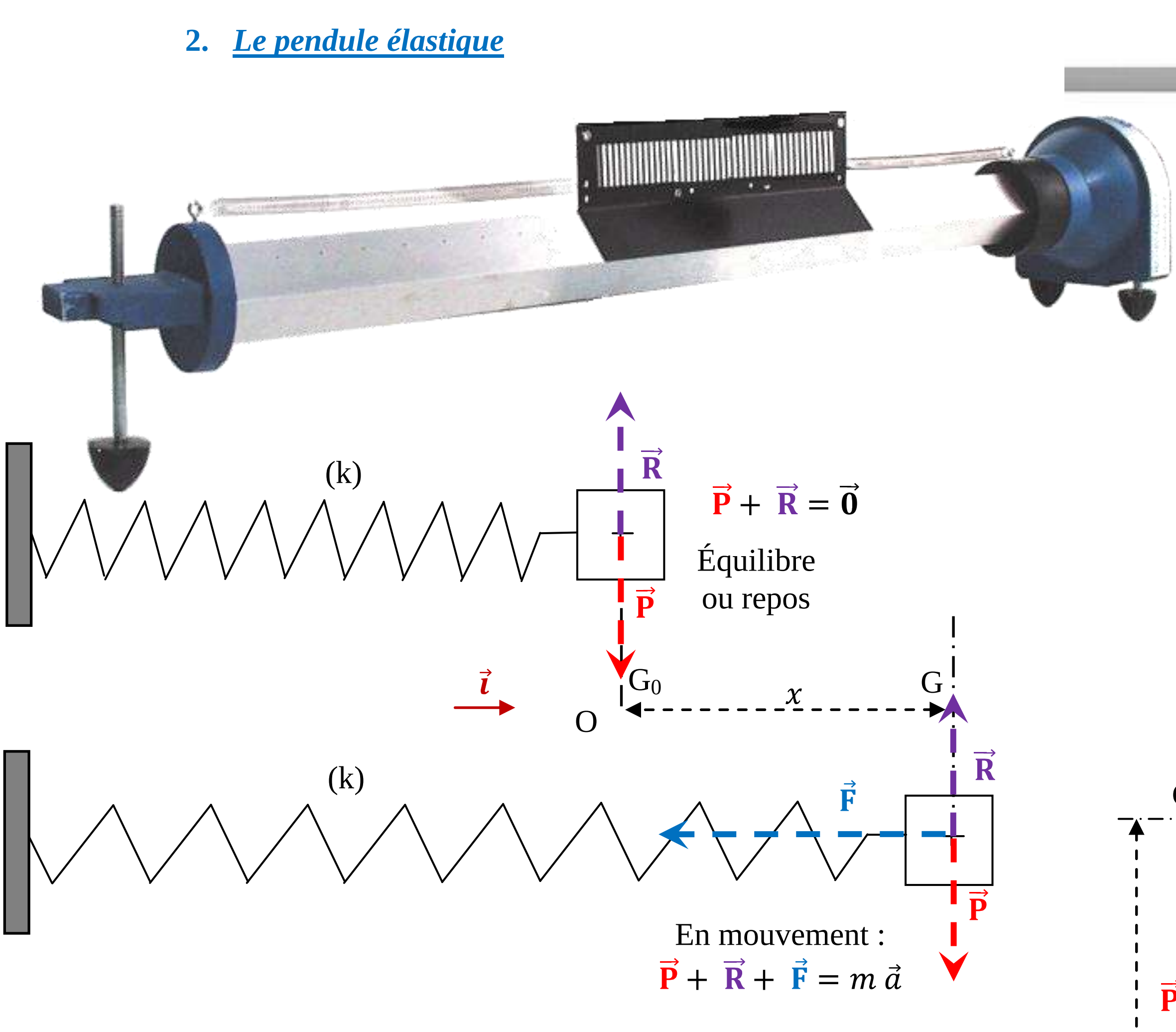
➢ La période du pendule simple

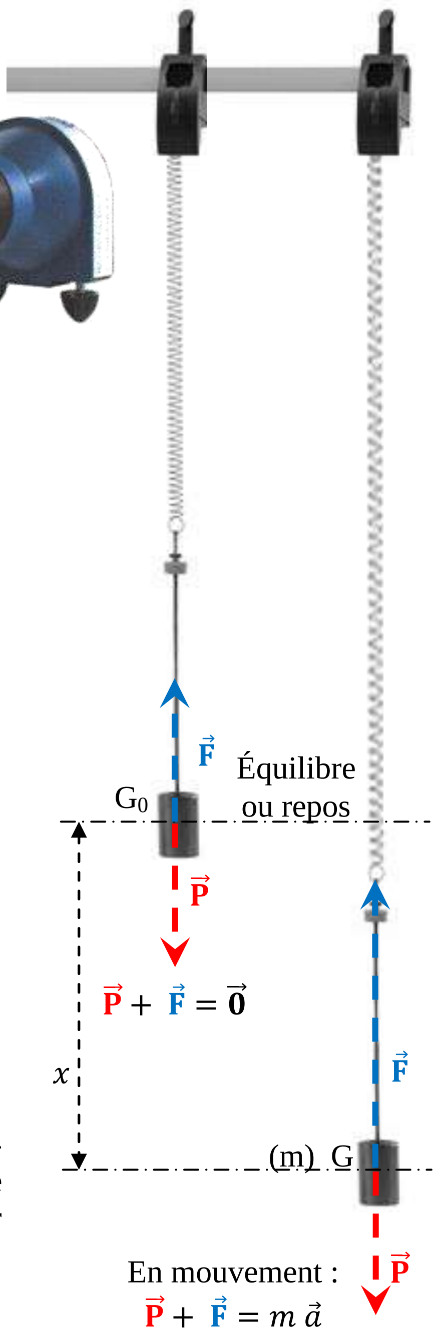
$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$[T_0] = [L]^{1/2} \times ([L]\,T^{-2})^{-1/2}$
$= [L]^{1/2}\,[L]^{-1/2}\,T = T$

T_0 la période propre du pendule est homogène à un temps.

2. *Le pendule élastique*





➢ Définition

Un pendule élastique est le modèle physique d'une masse « m » accrochée à un ressort de masse négligeable, de raideur k qui oscille lorsqu'elle est écartée de sa position d'équilibre. Le ressort exerce sur cette masse la force de rappel $\boxed{\vec{F} = -\mathbf{k}\,x\,\vec{i}}$ avec F = k $|x|$.

➢ La période du pendule élastique

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

$[T_0] = [m]^{1/2} \times [k]^{-1/2}$
$= M^{1/2} \times ([F] / [x])^{-1/2}$
$= M^{1/2} \times (M{\times}L{\times}T^{-2} / L)^{-1/2}$
$= M^{1/2} \times M^{-1/2} \times T = T$

T_0 la période propre du pendule est homogène à un temps.

Rappel sur les dimensions

$[\ell] = L$
$[v] = L\,T^{-1}$
$[a] = L\,T^{-2}$
$[F] = M\,L\,T^{-2}$
M est une masse,
L est une longueur,
T est un temps.

Remarque : [F] = $M{\times}L{\times}T^{-2}$ d'après la seconde relation de Newton $\vec{F} = m\,\vec{a}$ avec [a] = $L\,T^{-2}$

3. *Les oscillations mécaniques*

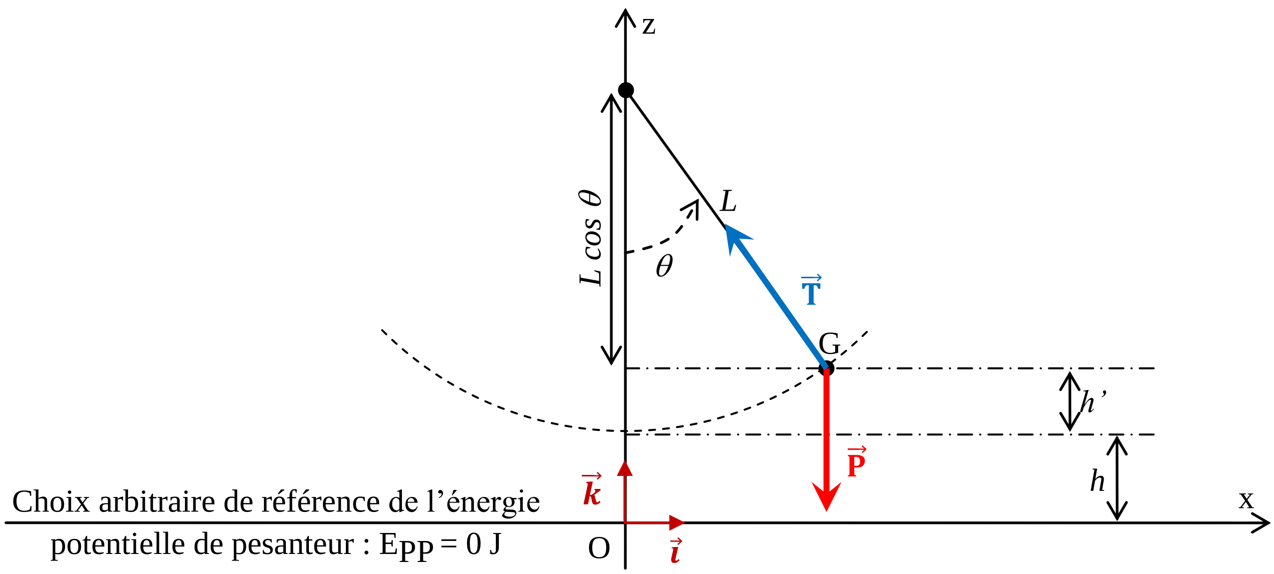
Fort des exemples précédents, on constate la présence d'oscillations mécaniques lorsque :

- Le système possède ***une position d'équilibre stable*** pour laquelle la somme des forces extérieures appliquées est nulle.
- Le système ne se stabilise pas car ***à cette position il possède une énergie cinétique non nulle*** ($E_C = \frac{1}{2} m\, v_G{}^2$) qui l'emporte au-delà dans un mouvement inertiel respectant la seconde loi de Newton.
- Le mouvement résultant est, en cas d'absence de tout frottement, un mouvement d'« OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE MÉCANIQUE », de ***période propre T_0***, de part et d'autre de cette position d'équilibre.

II. Dynamique du pendule

1. *Le pendule simple*

➢ Équation d'évolution temporelle du mouvement (équation différentielle)



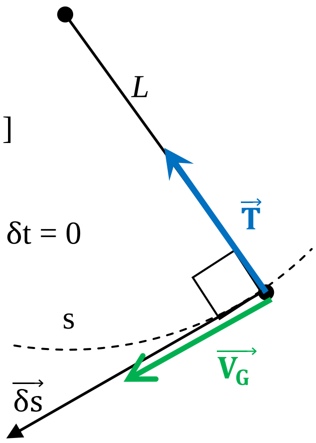
L'énergie mécanique du système {pendule-Terre} est somme de l'énergie cinétique (liée à la vitesse) et de l'énergie potentielle (liée aux forces qui travail au cours du déplacement) :

$$\boxed{E_M = E_C + E_P}$$

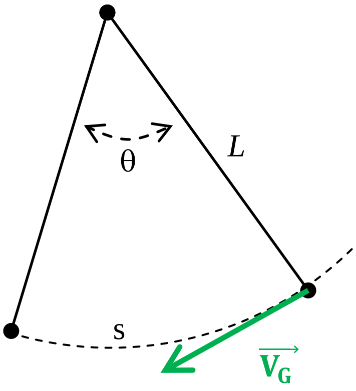
$$E_M = \frac{1}{2} m\, v_G{}^2 + m\, g\, (h + h') = \frac{1}{2} m\, v_G{}^2 + m\, g\, [\, h + L\, (1 - \cos\theta)\,]$$

Travail élémentaire δW de la tension $\vec{T}$ exercée par le fil : $\delta W = \vec{T} . \vec{\delta s}. = \vec{T} . \vec{V_G}\ \delta t = 0$

Ce travail est nul et ne développe aucune énergie car $\vec{T}$ est constamment perpendiculaire au déplacement $\vec{\delta s} = \vec{V_G}\ \delta t$.



Sur la trajectoire circulaire du mouvement non uniforme du pendule on a par ailleurs :



- « s » est l'abscisse curviligne telle que **s = L × θ**,
- « θ » représente l'angle en radian, au centre de l'arc s de rayon L.
  (*pour* $\theta \leftrightarrow s = \theta R$ *; pour* $2\pi \leftrightarrow s = 2\pi R$)
- « **$v_G = L\ \dot{\theta}$** » est la relation entre vitesse linéaire « v_G » et vitesse angulaire « $\dot{\theta} = \frac{d\,\theta}{dt}$ ».

  $$(v_G = \frac{ds}{dt} = \frac{d(L\theta)}{dt} = L\ \frac{d\theta}{dt} = L\ \dot{\theta})$$

D'où :

$$E_M = \frac{1}{2}m\ (L\ \dot{\theta})^2 + m\ g\ [\ h + L\ (1 - \cos\theta)\ ]$$

$$E_M = \frac{1}{2}m\ \ L\dot{\theta}^2{}^{\ 2} + m\ g\ \ h + m\ g\ \ L - m\ g\ \ L\cos\theta$$

S'agissant d'oscillations libres sans frottements, cette énergie mécanique est constante :

$$\frac{d\,E_M}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m\ \ L^2\ \frac{d\,(\ \dot{\theta}^2\ )}{dt} + m\ g\ \ L\ \ \frac{d\,(\cos\theta)}{dt}$$

$$0 = m\,L^2\ \ \dot{\theta}\ \ddot{\theta}\ \ + m\ g\ \ L\ \dot{\theta}\ \sin\theta$$

Comme $\dot{\theta} = \frac{d\,\theta}{dt}$ ne peut être constamment nulle quel que soit le temps :

$$0 = L\ \ddot{\theta}\ \ +\ \ g\ \ \sin\theta$$

Dans l'approximation de petits angles (petites oscillations du pendule) exprimés en radian, $\sin\theta \approx \theta$:

$$L\ \ddot{\theta}\ \ +\ \ g\ \ \theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta}\ \ +\ \ \frac{g}{L}\ \ \theta = 0}$$

C'est l'équation d'un « oscillateur harmonique » $\ddot{\theta} + \omega_0^2\ \theta = 0$ dont la solution est sinusoïdale

$\boxed{\theta = \theta_m \cos\,(\omega_0 t + \varphi)}$ <u>si et seulement si</u> $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$, <u>ou</u> $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

En effet

$\theta = \theta_m \cos\,(\omega_0 t + \varphi)$

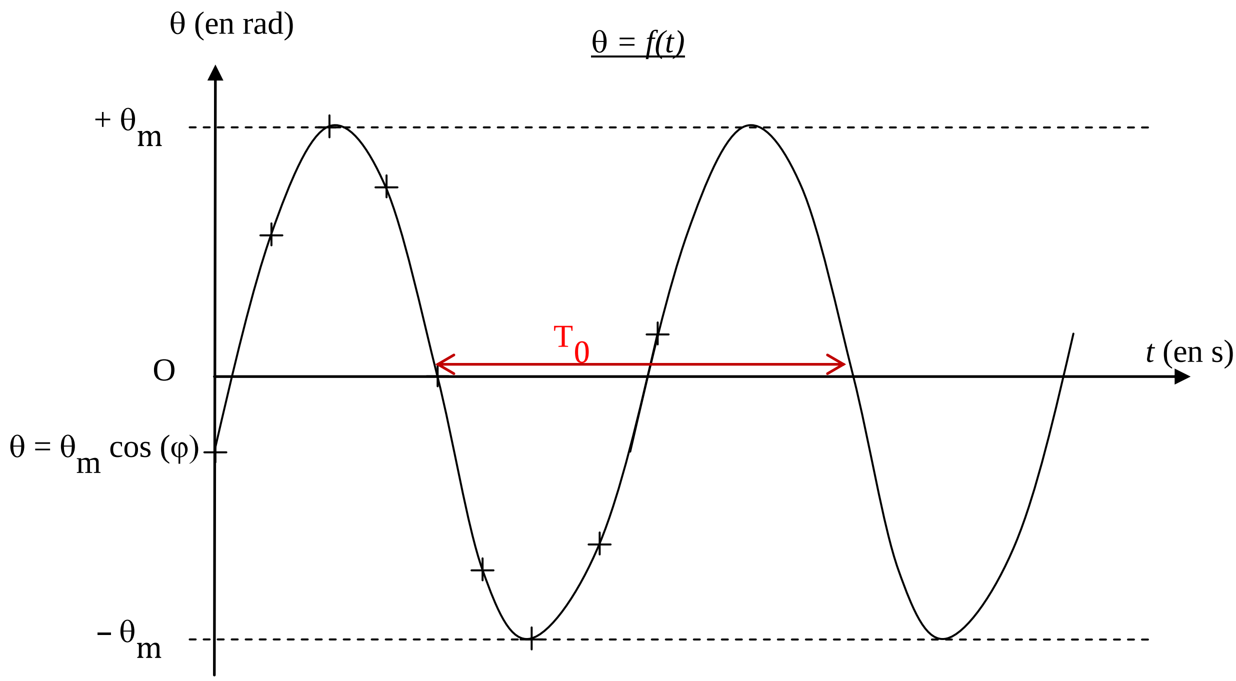
$\dot{\theta}\ = -\ \theta_m\ \omega_0 \sin\,(\omega_0 t + \varphi)$

$\ddot{\theta}\ \ = -\ \theta_m\ \omega_0^2 \cos\,(\omega_0 t + \varphi) = -\ \omega_0^2\ [\theta_m \cos\,(\omega_0 t + \varphi)] = -\ \omega_0^2\ \theta$, on a bien $\ddot{\theta}\ + \omega_0^2\ \theta = 0$

dont $\theta = \theta_m \cos\,(\omega_0 t + \varphi)$ est solution ssi $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$.

➢ Évolution temporelle du pendule

Le pendule simple oscille donc sinusoïdalement entre les maxima + θ_m et – θ_m à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ rad.s^{-1}. L'amplitude de ses oscillations est donc constante en l'absence de tout frottement.



Son énergie mécanique $E_M = E_C + E_P$ est alors :

- Pour l'énergie cinétique

$E_C = \frac{1}{2} m\, v_G{}^2 = \frac{1}{2} m\, (L\,\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m\, L^2\, \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\, L^2\, [-\,\theta_m\, \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)]^2$

$E_C = \frac{1}{2} m\, L^2\, \theta_m^2\, \omega_0^2\, \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_m^2\, \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

- Pour l'énergie potentielle

$E_P = m\, g\, [\, h + L\,(1 - \cos\theta)\,] = m\, g\, [\, h + L\,(1 - \cos\theta)\,] = m\, g\, h + m\, g\, L\,(1 - \cos\theta)$

$E_P = m\, g\, h + m\, g\, L\,(1 - \cos\theta)$ qui devient dans le cas de petites oscillations,

$E_P \approx m\, g\, h + m\, g\, L \frac{\theta^2}{2} = m\, g\, h + \frac{1}{2} m\, g\, L\, [\theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2$

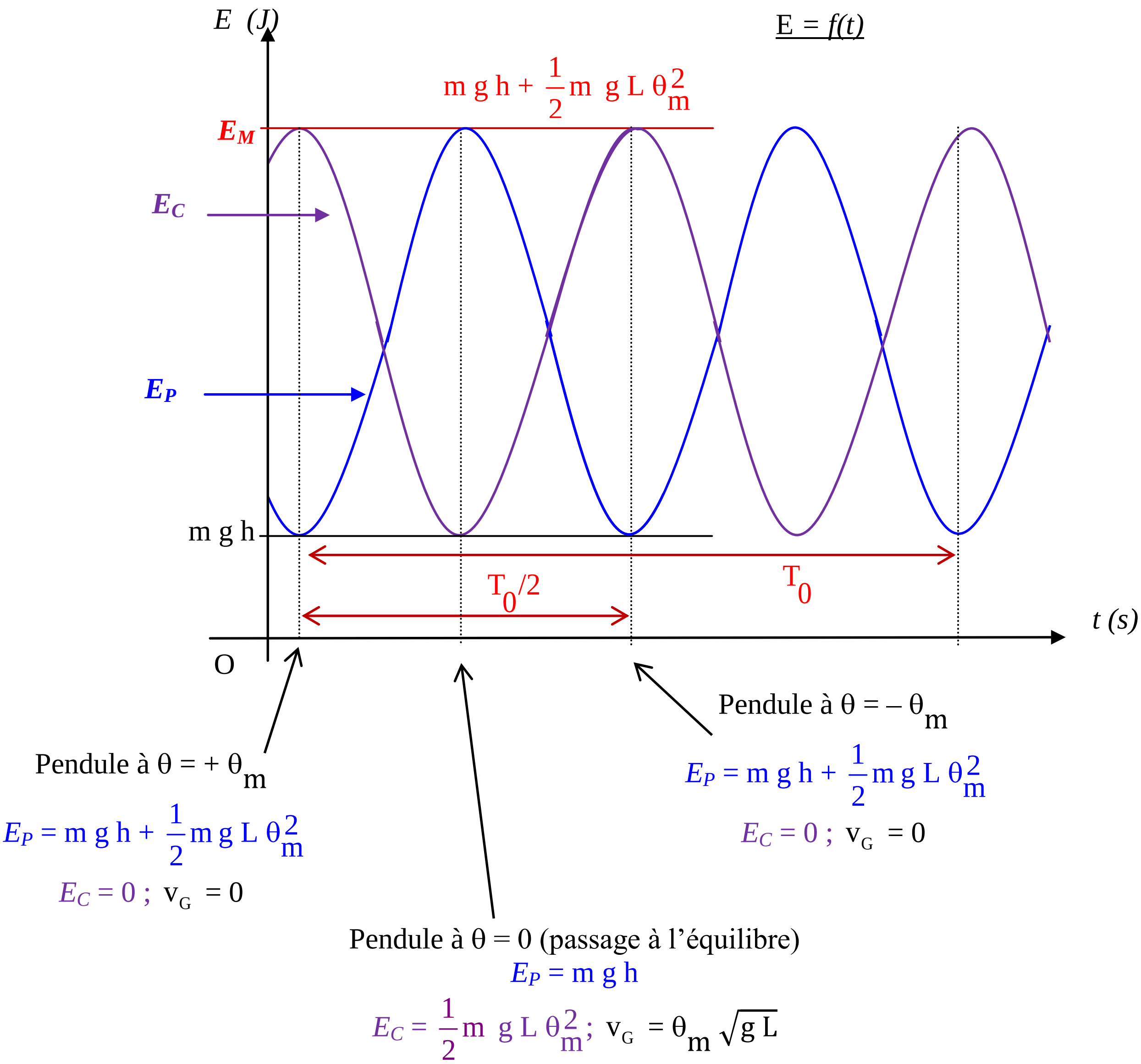
$E_P \approx m\, g\, h + \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

- Pour l'énergie mécanique

$E_M = E_C + E_P \approx \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + m\, g\, h + \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$\mathbf{E_M} \approx m\, g\, h + \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_m^2\, [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = \mathbf{m\, g\, h + \frac{1}{2} m\, g\, L\, \theta_m^2}$

Cette énergie est constante au cours du temps.



Il y a transformation permanente de l'énergie sous formes cinétique et potentielle de pesanteur à une fréquence double de l'oscillation du pendule. Sans frottement aucune perte d'énergie n'est dissipée vers l'extérieur, le pendule acquiert sa vitesse maximale au passage à la verticale d'équilibre et poursuit sa course dans cet allant incessant.

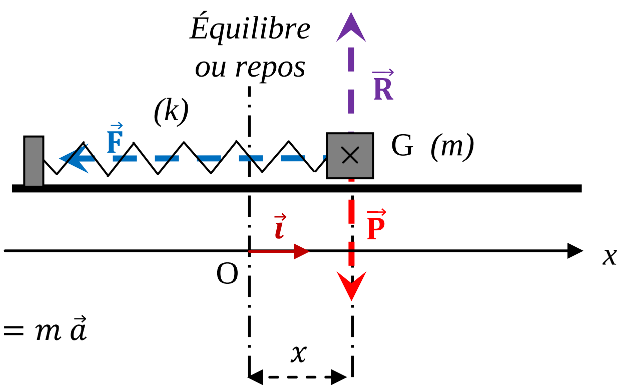
2. *Le pendule élastique*

➢ Équation d'évolution temporelle du mouvement

Le solide est soumis à trois forces:

- son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$
- la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k.x.\vec{i}$
- la réaction normale du support, $\vec{R}$

(pas de frottements)



Deuxième loi de Newton appliquée au solide :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

En projection selon l'axe (O,x) il vient : $0 - k.x + 0 = m.a_x = m.\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}.x = 0}$$

C'est l'équation d'un « oscillateur harmonique » $\ddot{X} + \omega_0^2\ X = 0$ dont la solution est sinusoïdale

$\boxed{X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$ si et seulement si $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, ou $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

En effet

$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

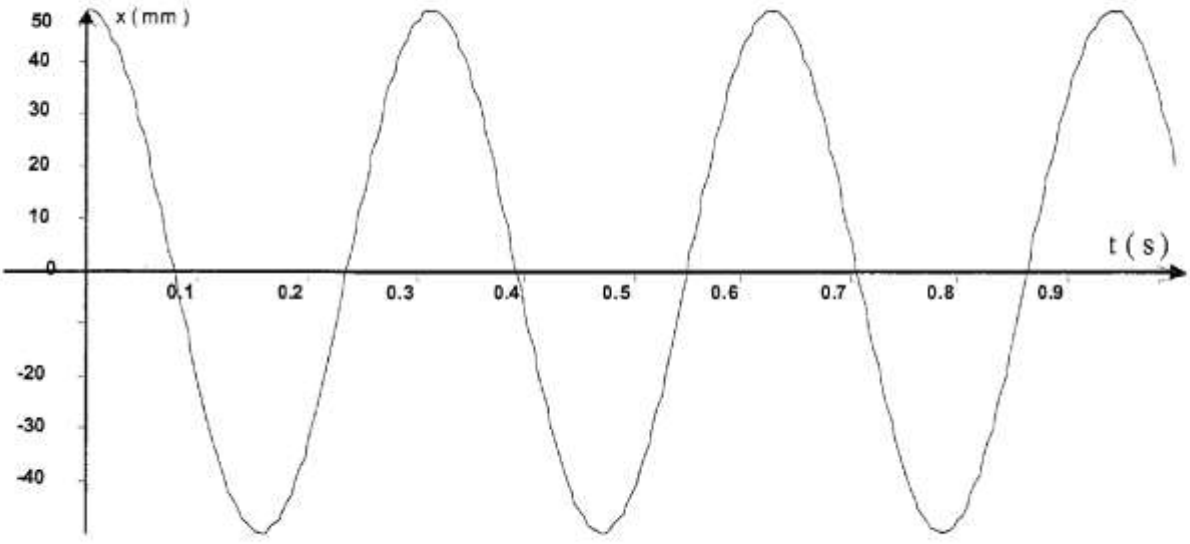
$\dfrac{dx}{dt} = -X_m.\ \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -X_m.\ \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2.\ x(t) \Leftrightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\ x = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

- Évolution temporelle du pendule

Le pendule élastique oscille sinusoïdalement entre les maxima $+X_m$ et $-X_m$ à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ rad.s^{-1}. L'amplitude de ses oscillations est constante en l'absence de tout frottement.

Exemple



Son énergie mécanique $E_M = E_C + E_P$ est :

- Pour l'énergie potentielle élastique

$$\boxed{E_P = \frac{1}{2}k\,x^2}$$

En effet la seule force qui travail est la force de rappel $\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{k}\,\boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$ dont le travail élémentaire δW est :

$$\delta W = \vec{\mathbf{F}}.\overrightarrow{\delta x} = -\mathbf{k}\,\boldsymbol{x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}\ .\ \delta x\ \vec{\boldsymbol{\imath}} = \mathbf{k}\,\boldsymbol{x}\,\delta x$$

On ne peut-on pas utiliser dans ce cas l'expression $\underset{A\to B}{W}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$ car la force de rappel $\vec{F}$ n'est pas constante au cours du déplacement (sa valeur dépend de x)

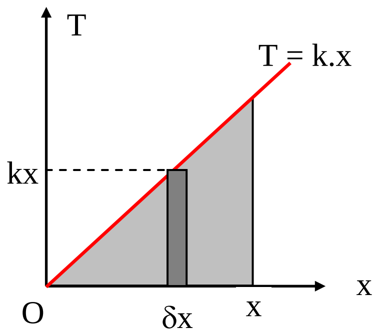
Par intégration, le travail W effectué par la force $\vec{\mathbf{F}}$ pour un allongement x à partir de l'origine O est :

$$W = \int_0^x k.x.\delta x = ½.k.x^2 \qquad \text{avec k constante.}$$

Par méthode graphique

Le travail élémentaire δW correspond à l'aire du petit rectangle, en gris foncé, de hauteur k.x et de largeur δx.

Le travail W correspond à l'aire du triangle en gris clair, dont les cotés ont pour longueur x et kx.
Soit W = ½.k.x²
W est la somme des aires des petits rectangles.



L'énergie potentielle élastique E_{pe} du système {masse - ressort} est égale au travail W de la force $\vec{\mathbf{F}}$ soit : $E_{pe} = ½.k.x^2$ à une constante additive près choisie nulle

Il vient donc

$$E_P = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,[\,X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2}k\,X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- Pour l'énergie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v_G{}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\ [-X_m\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2}m\ X_m^2\,\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\,k\,X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{puisque} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}\ .$$

- Pour l'énergie mécanique

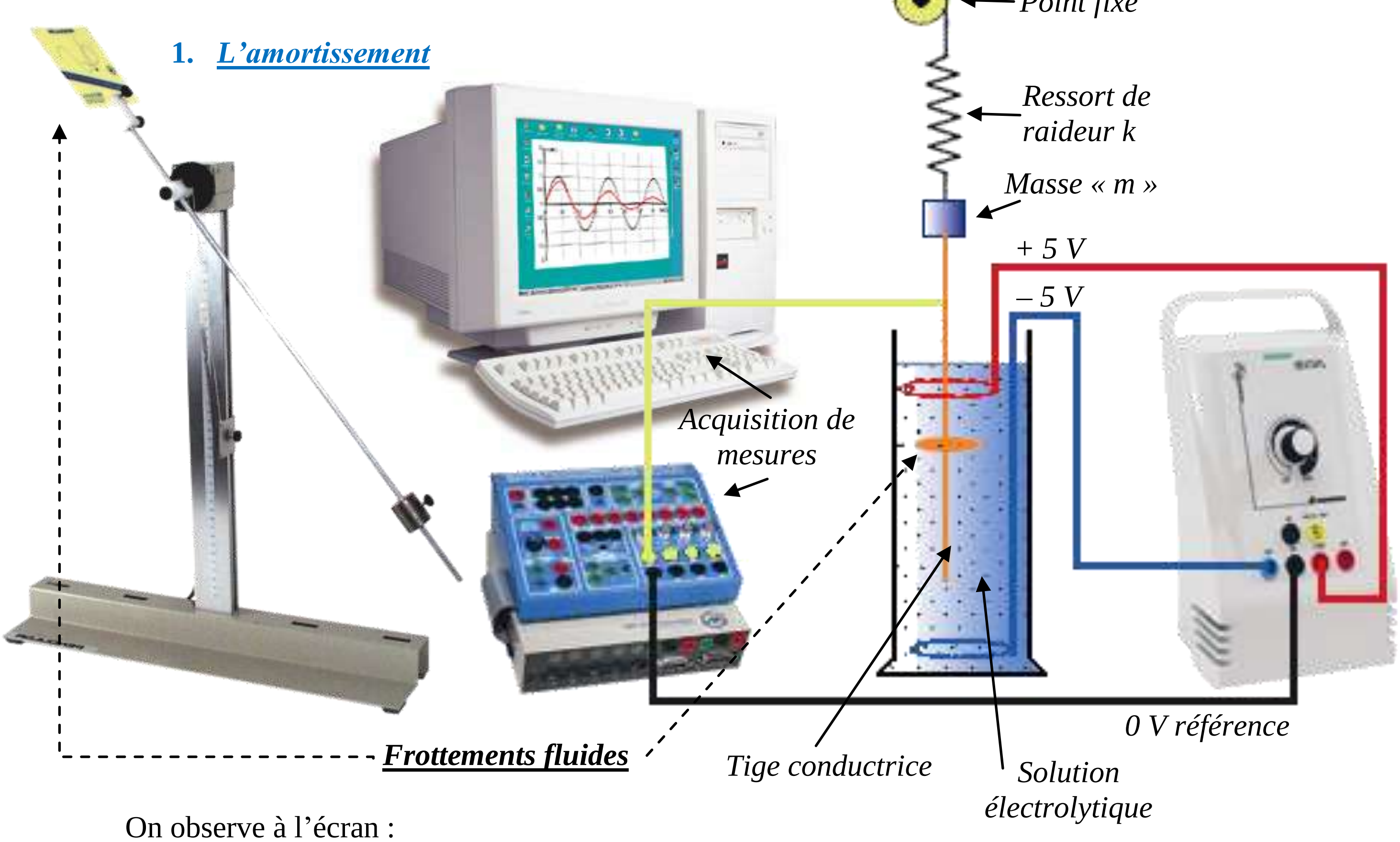
$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}k\,X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}\,k\,X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\mathbf{E_M} = \frac{1}{2}k\,X_m^2\,[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi\,)] = = \frac{1}{2}k\,X_m^2$$ **constante au cours du temps.**

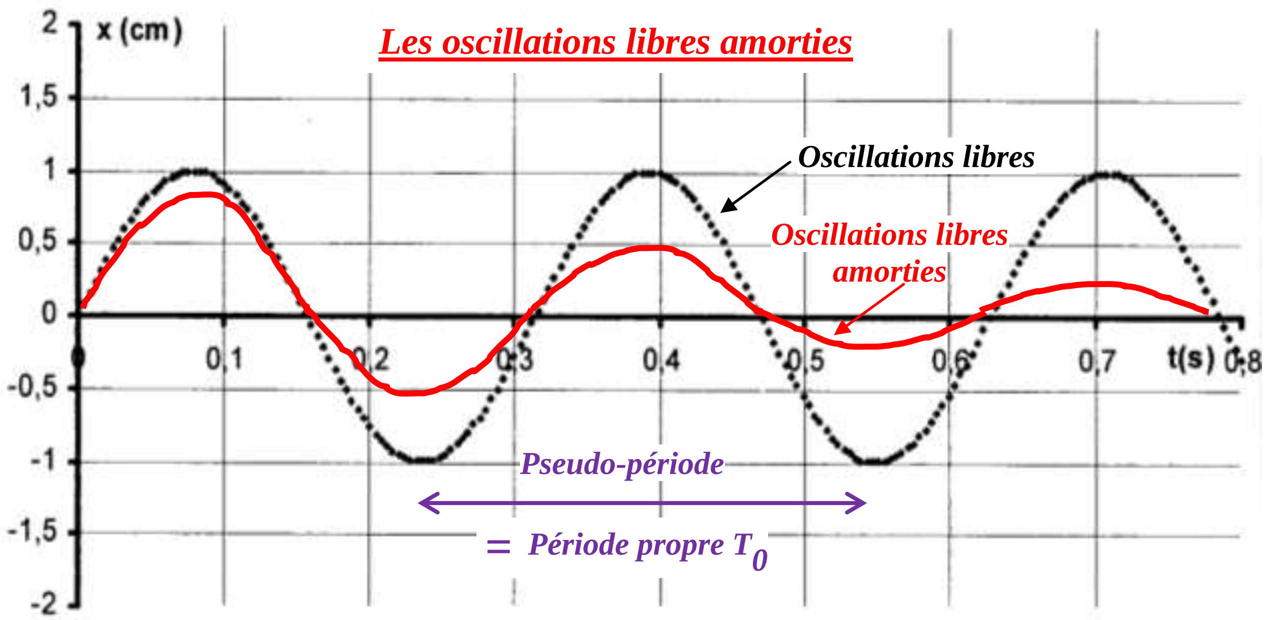
De nouveau, en l'absence de frottement, l'énergie est transférée sous forme potentielle ou cinétique à un rythme deux fois plus rapide que le mouvement périodique du pendule élastique. L'énergie mécanique constante, est exclusivement cinétique au passage à la position d'équilibre où la vitesse est alors maximale ($v_G = X_m\sqrt{k/m}$). Elle devient exclusivement potentielle élastique aux extrema du mouvement, où la vitesse est nulle.

III. Amortissements et oscillations forcées

1. *L'amortissement*

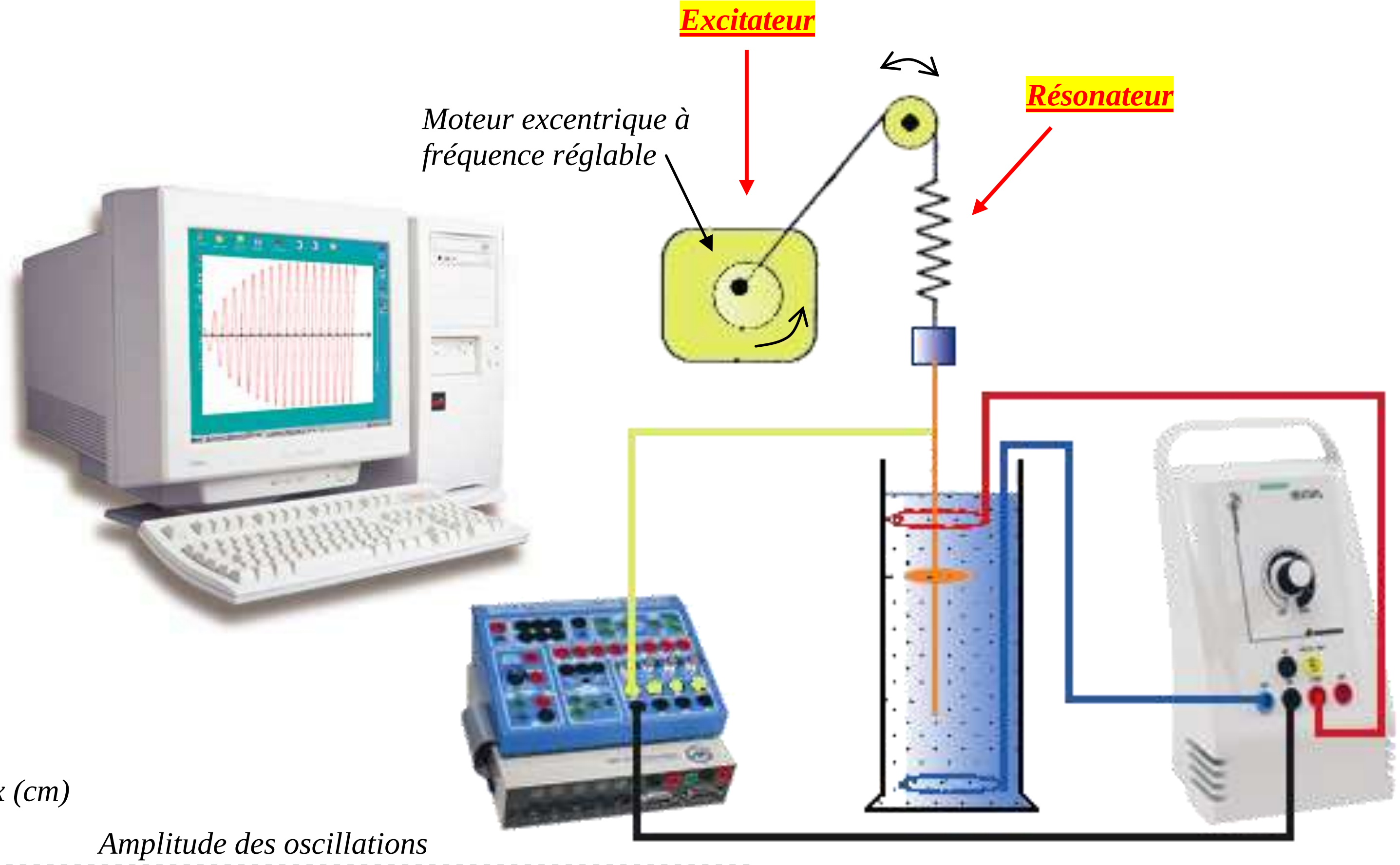


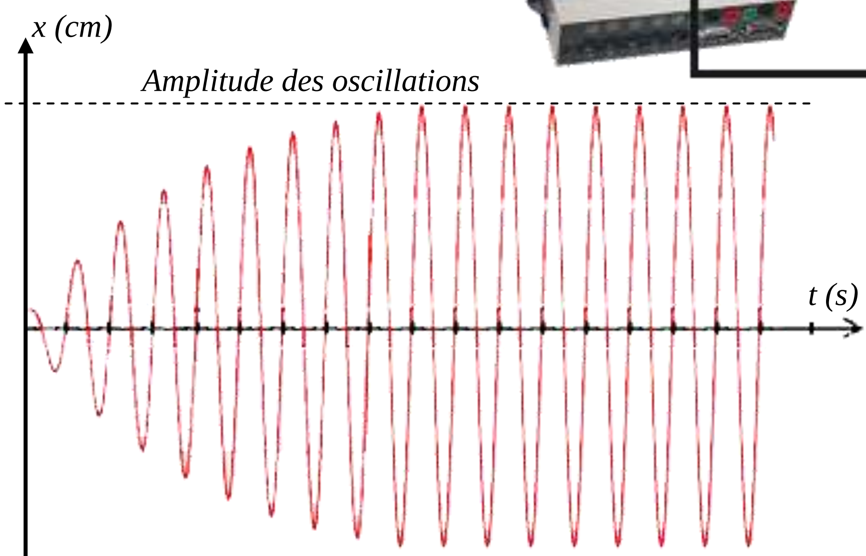
On observe à l'écran :



Dès l'apparition d'un ***frottement fluide ou solide***, le régime d'oscillations devient **pseudo-sinusoïdal**. L'amplitude des oscillations diminue selon la qualité et le type de frottements (importants ou faibles, fluides ou solides). En cas de faibles frottements, la **pseudo –période** est égale à la **période propre T_0** de l'oscillateur. Elle augmente dans le cas contraire, voire même disparaît lors du **régime apériodique**.

2. *L'oscillation forcée*





Après une période transitoire d'établissement des oscillations, le **résonateur** adopte, **à la fréquence imposée par l'excitateur**, une amplitude constante.
Si toutefois la fréquence de l'**excitateur** est différente de la fréquence propre f_0 des oscillations libres de l'oscillateur, ces amplitudes sont faibles. Lorsque l'excitateur pulse à la fréquence propre f_0 de l'oscillateur, c'est la **résonance mécanique** et les ***amplitudes sont maximales***.
Selon l'amortissement, cette résonance est plus ou moins « ***floue*** ».

Résonance d'amplitude