Lycée Galilée Gennevilliers

Le dipôle R, L série

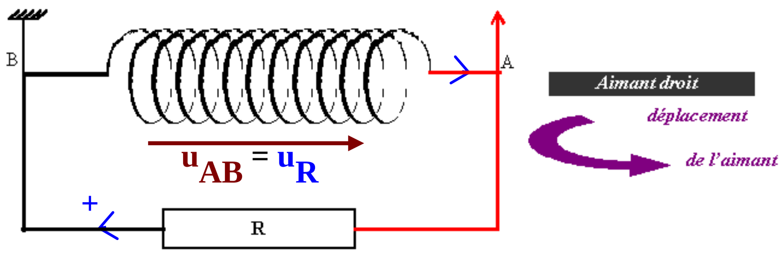
chap. 2

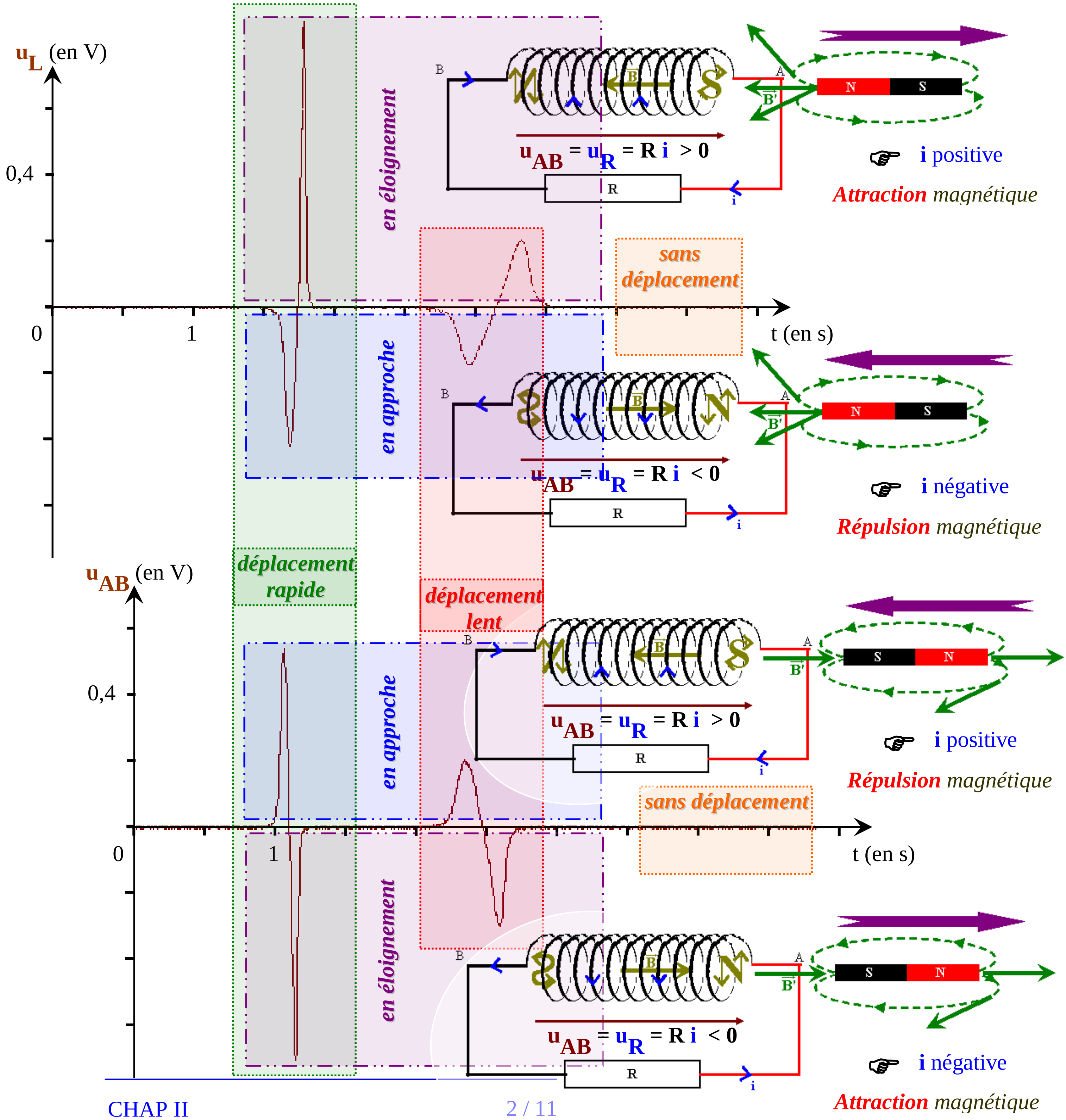
Jallu Laurent

Le dipôle R, L série

I. Le solénoïde

- ***Présentation***





Il apparaît aux bornes du solénoïde « ***une tension induite* u_{AB}** », qui génère « ***un courant induit* i** » lorsque le circuit est fermé. Ce courant **i**, par le champ magnétique $\vec{B}$ qu'il crée au sein même du solénoïde, s'oppose aux variations du champ $\vec{B'}$ de l'aimant droit lors de son déplacement. Le solénoïde est le siège d'un phénomène qui vérifie la « ***Loi de Lenz*** *: Le sens du courant d'induction est toujours tel que le champ magnétique qu'il crée diminue les variations du champ magnétique qui ont produit ce courant d'induction* ». C'est « ***l'induction magnétique*** ».

- ***Auto induction***

Lorsque le solénoide est traversé par un courant **i** que l'on installe par un générateur, il crée son propre champ magétique : par exemple, $\vec{B} = \mu \frac{N}{\ell}\, i$, μ perméabilité magnétique du milieu avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ S.I. celle du vide, N nombre de spires et ℓ la longeur du solénoïde « infiniment long ». Si ce champ $\vec{B}$ varie avec **i**, alors le solénoïde est le siège d'une « ***auto induction*** » qui tente de s'opposer à ses propres variations imposées de **i**. À ses bornes apparaît une « force électromotrice d'autoinduction *f. e. m.* **e** » d'autant plus grande que les variations de **i** sont rapides (confère courbes ci-dessus) :

(en H, le Henry) (en A)

$$\boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$$

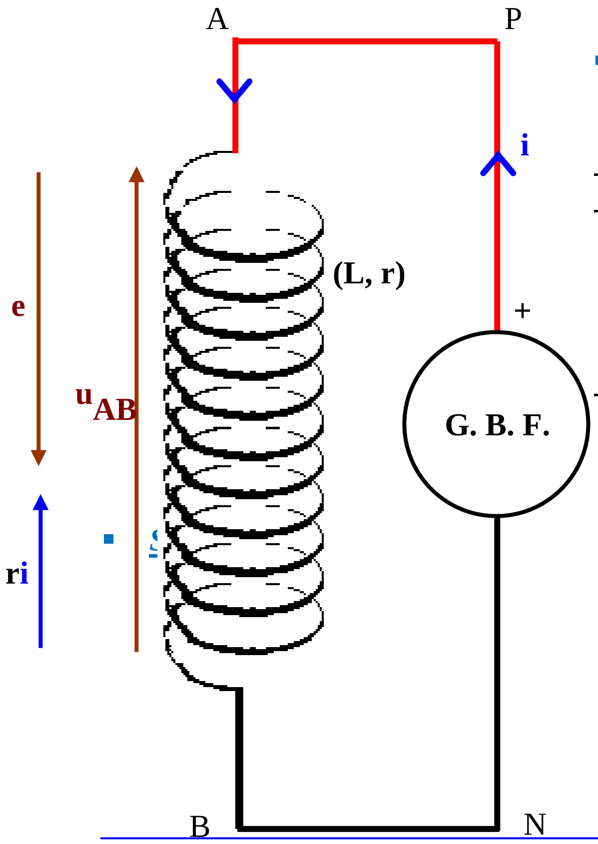
(en V) (en s)

$L = \dfrac{\mu N^2 S}{\ell}$

S section du solénoïde en m².

info

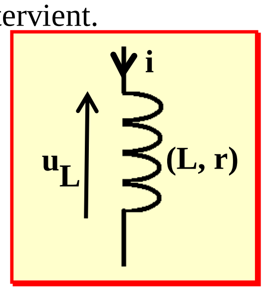
L, « ***inductance du solénoïde*** », mesure sa capacité à s'auto induire (*capacité de réaction face aux variations institutionnelles*). C'est une caractéristique du solénoïde avec sa résistance « r ».



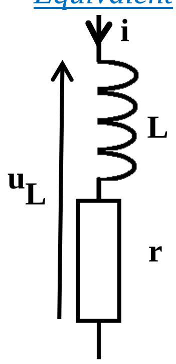
- ***Tension aux bornes du solénoïde*** Elle est donc somme des deux facteurs résistifs et inductif au sein du solénoïde.
- dans la convention récepteur, le facteur résistif : **ri**,
- dans la convention générateur, le facteur inductif : **e**.

$$\boxed{u_{AB} = ri - e = ri + L\frac{di}{dt} = u_L}$$

- si le solénoïde est « idéal ou pur » (r = 0 Ω) seul le terme inductil intervient.



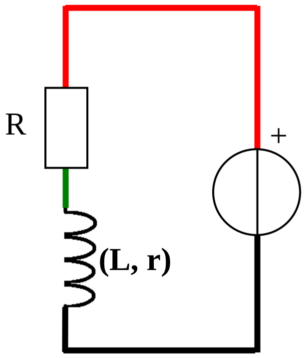
Équivalent



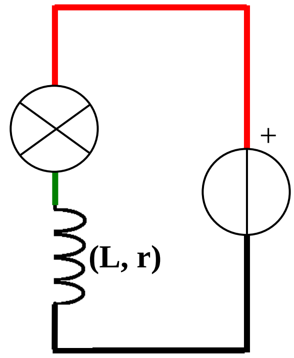
ex :

L = 1 H, r = 10 Ω.
L = 1100 mH, r = 4 Ω.

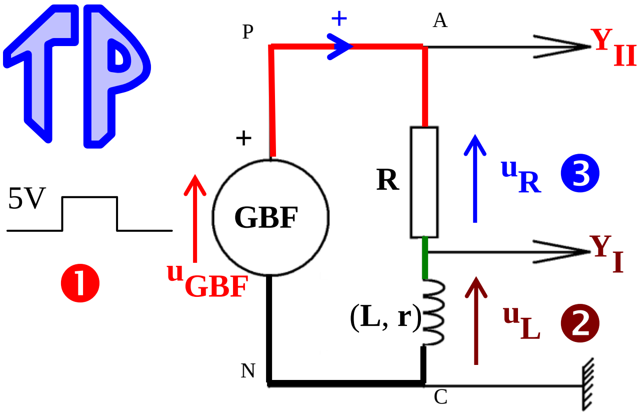
II. Le dipôle R, L série



Comme lors du dipôle R, C on constate un retard à l'allumage de la lampe. L'évolution temporelle du dipôle R, L série doit présenter quelques similitudes avec le dipôle R, C série. La lampe est là encore remplacée par cette résistance R.



- ***L'échelon de tension***

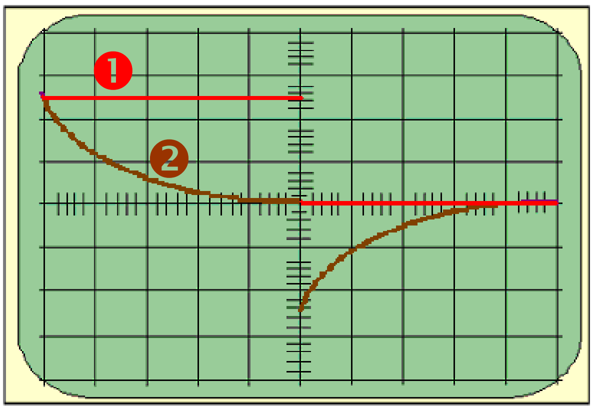


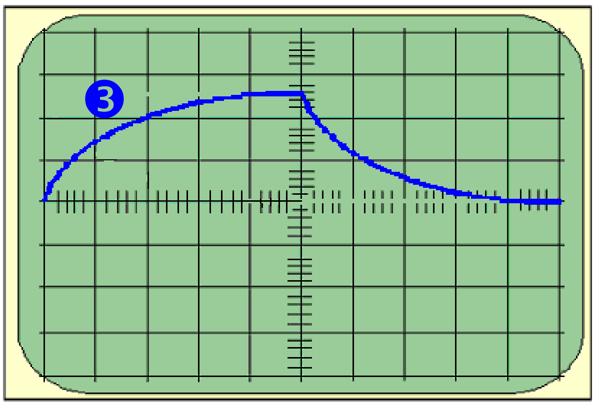
u_R = R i

u_L = ri + L $\frac{di}{dt}$

u_{GBF} = E *avec* **E = 0** ou **5 V**

$u_{GBF} = u_{PN} = u_{AC} = u_R + u_L$





Retard à l'extinction de la **tension u_L** ❷ par rapport aux basculements du **générateur u_{GBF}** en ❶.

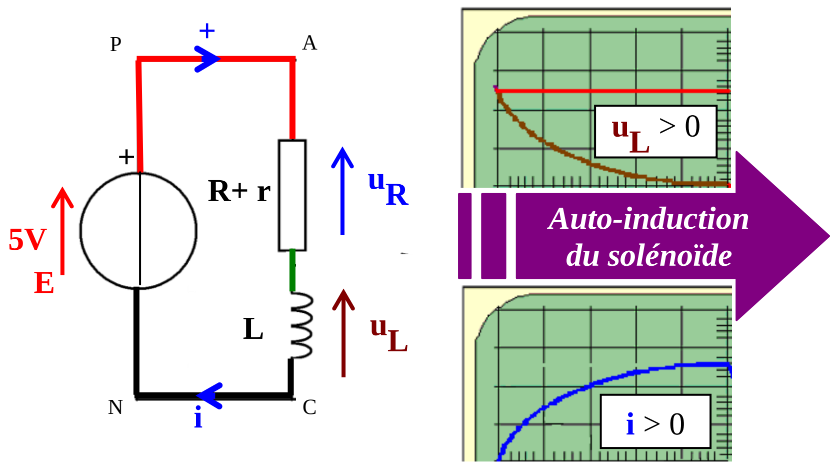
La **tension u_R** en ❸, ***image à R près du courant i circulant dans le circuit***, est continûment positive.

L'intensité traversant le dipôle suit les variations de tension imposées par le générateur mais avec une certaine « lenteur ». La tension aux bornes du solénoïde présente cette même « lenteur » en plus du saut de discontinuité lorsqu'elle change de signe. Au bout d'un certain temps elle s'annule, hors les basculements du générateur.

- ***Interprétation microscopique***

La tension u_R en ❸, est comme **i** dont elle est l'image, continue et positive. Contrairement au dipôle R, C aucun point de discontinuité n'est présent dans le circuit pour interrompre le sens du **courant i** imposé par le **générateur u_{GBF}** en ❶. Elle suit avec « retard » l'évolution de celui-ci, non nulle lorsqu'il génère (u_{GBF} = **5 V**) et nulle lorsqu'il s'efface (u_{GBF} = **0 V**).

- Lorsque la tension u_{GBF} en ❶ du générateur installe le **courant i** sous une différence de potentiels constante de **5 V** (parties gauche des oscilloscopes), la **tension u_L** ❷ est brusquement positive et s'annule. Le solénoïde a réagit en s'opposant au champ magnétique qu'il crée. Cette auto-induction dure tant que **i** varie ($\frac{di}{dt} \neq 0$). La f. e. m. $e = -L\frac{di}{dt}$ qu'il génère, est négative. Ce comportement générateur s'oppose au GBF et en ralentit l'établissement du courant.

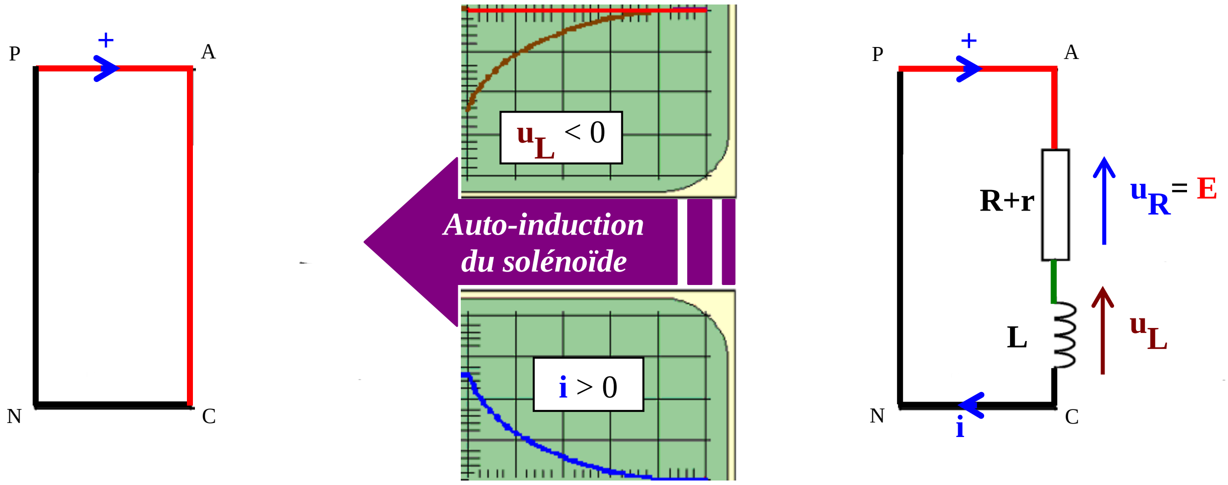


*Le générateur bascule de **0** à **5 V** et tente d'établir le **courant i** positif. Cette brusque variation d**i** auto induit un contre courant qui finit par s'éteindre lorsque **i** est enfin installée (**i** constant). Les évolutions temporelles du **courant i**, de la tension u_R traduisent celle du solénoïde u_L.*

*Après installation du **courant i**, l'effet inductif du solénoïde est terminé. Celui-ci n'est présent dans le circuit que sous son aspect résistif « **r** » additionné à la résistance **R**. Si le solénoïde est pur (**r** = 0 Ω) la **tension u_L** est alors nulle (cas de l'étude). Sinon **R** et **r** se partagent la tension **E** du générateur et $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R + r}}$ est non nulle.*

- Lorsque la tension u_{GBF} en ❶ du générateur bascule à **O V** (parties droites des oscilloscopes) il s'efface en provoquant de nouveau une brusque variation du **courant i**. d**i** de nouveau non nulle, le solénoïde reparaît par son induction qui s'oppose désormais à cette variation de son champ magnétique. La f. e. m.

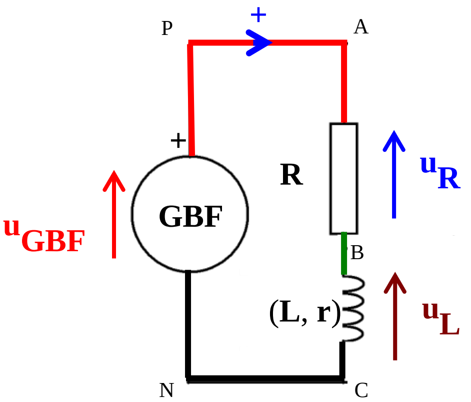
nouvelle **e** alors positive, tente d'impulser un courant en concordance avec le générateur qui s'éteint. L'extinction du **courant i** s'en trouve ralentie.



À la fin, plus aucun courant ne circule dans le circuit. La résistance **R**, *le solénoïde* (**L**, **r**) *ont comme le générateur, « disparus » avec le retard lié à l'auto induction. Toutes les tensions sont ainsi nulles.*

La disparition nouvelle du générateur provoque une auto induction du solénoïde puisque d**i** <0 (*le* **courant i** *s'éteint*). *Le solénoïde est un générateur éphémère qui induit un courant de même sens que* **i**. *Il en ralentit sa disparition.*

- ***Étude théorique***



$$u_{PN} = u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

$$u_{GBF} = u_R + u_L$$

Or $\quad u_R = R\,i \quad$ et $\quad u_L = r i + L\dfrac{di}{dt}$

Donc $\quad u_{GBF} = R\,i + r i + L\dfrac{di}{dt}$

Comme $\quad u_{GBF} = E$,

À tout instant $\quad \boxed{E = L\dfrac{di}{dt} + (R+r)\,i.}$

- *Équation différentielle du 1^er^ ordre en* **i** (*t*) ;
- *Évolution temporelle du courant* **i** (*t*).

Avec **E** = **constante** (**5 V** *ou* **O V**).

Solution algébrique $\quad \boxed{L\dfrac{di}{dt} + (R+r)\,i = E \quad \text{ou} \quad \dfrac{di}{dt} + \dfrac{(R+r)\,i - E}{L} = 0.}$

☞ À l'établissement du courant : $\mathbf{E} = 5$ V, $\mathbf{i}(0) = 0$ A. Par ailleurs, $\mathbf{y} = \mathbf{i} - \dfrac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}$

$$\Rightarrow \mathbf{i} - \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})} = \mathbf{k}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}} \quad \text{or } \mathbf{i}(0) - \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})} = \mathbf{k} \text{ à } t = 0 \text{ s, donc } \mathbf{k} = -\frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}$$

Et

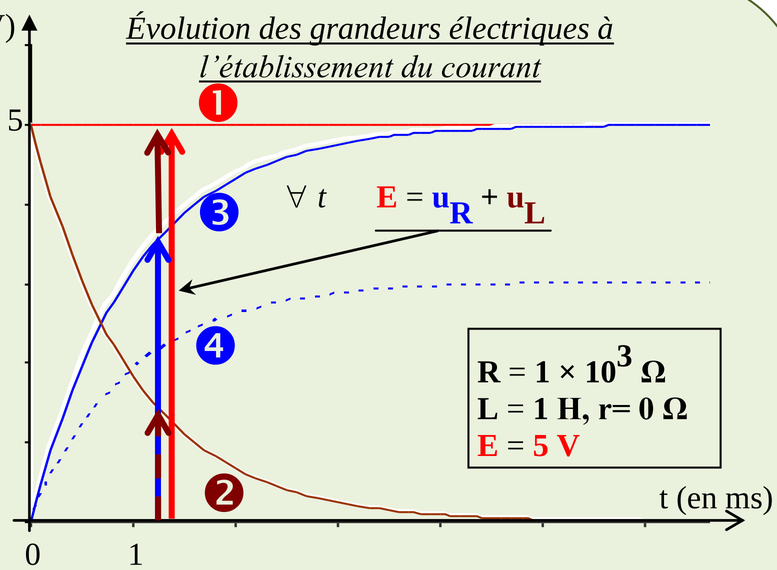
❹ $$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\left(1 - e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}\right)$$

❸ $$\mathbf{u_R} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\left(1 - e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}\right)$$

❷ $$\mathbf{u_L} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \mathbf{L}\,\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

$$\mathbf{u_L} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\left(1 - e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}\right) + \mathbf{E}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}$$

$$\mathbf{u_L} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\left(e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}} + \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}}\right)$$



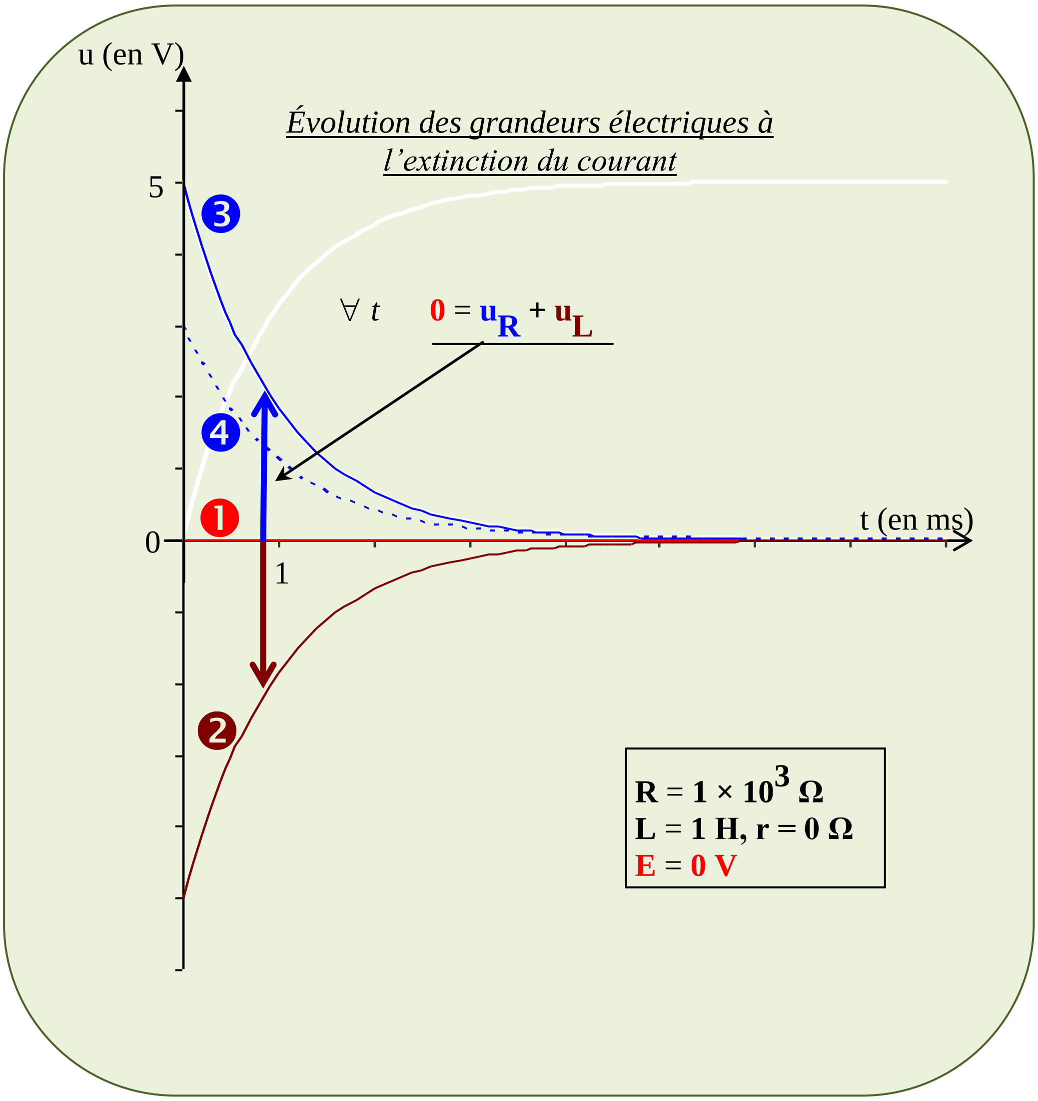
☞ À l'extinction du courant : $\mathbf{E} = 0$ V, $\mathbf{i}(0) = \dfrac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}$ et $\mathbf{y} = \mathbf{i}$.

$$\Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{k}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}} \quad \text{or } \mathbf{i}(0) = \mathbf{k} \text{ à } t = 0 \text{ s, donc } \mathbf{k} = \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})} \text{ et}$$

❹ $$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}$$

❸ $$\mathbf{u_R} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}$$

❷ $$\mathbf{u_L} = \mathbf{r}\mathbf{i} + \mathbf{L}\,\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{\mathbf{r}\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}} - \mathbf{E}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}\, e^{-\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,t}{\mathbf{L}}}$$



Solution numérique **Méthode D'Euler**

$$\mathbf{L}\,\frac{\Delta \mathbf{i}}{\Delta t} + (\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\mathbf{i} = \mathbf{E} \qquad \underline{\textit{ou}} \qquad \frac{\Delta \mathbf{i}}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\mathbf{i} - \mathbf{E}}{\mathbf{L}} = 0.$$

$\Rightarrow$ $\quad \mathbf{i}\,(t+\Delta t) = \mathbf{i}\,(t) + \Delta\,\mathbf{i}(t)$ avec $\Delta\,\mathbf{i}(t) = -\left(\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\mathbf{i}(t) - \mathbf{E}}{\mathbf{L}}\right)\Delta t$

$\Delta\,\mathbf{i}(t+\Delta t) = -\left(\frac{(\mathbf{R}+\mathbf{r})\,\mathbf{i}(t+\Delta t) - \mathbf{E}}{\mathbf{L}}\right)\Delta t$ et $\mathbf{i}(t)$

État du courant $\mathbf{i}(t)$ à l'instant t.

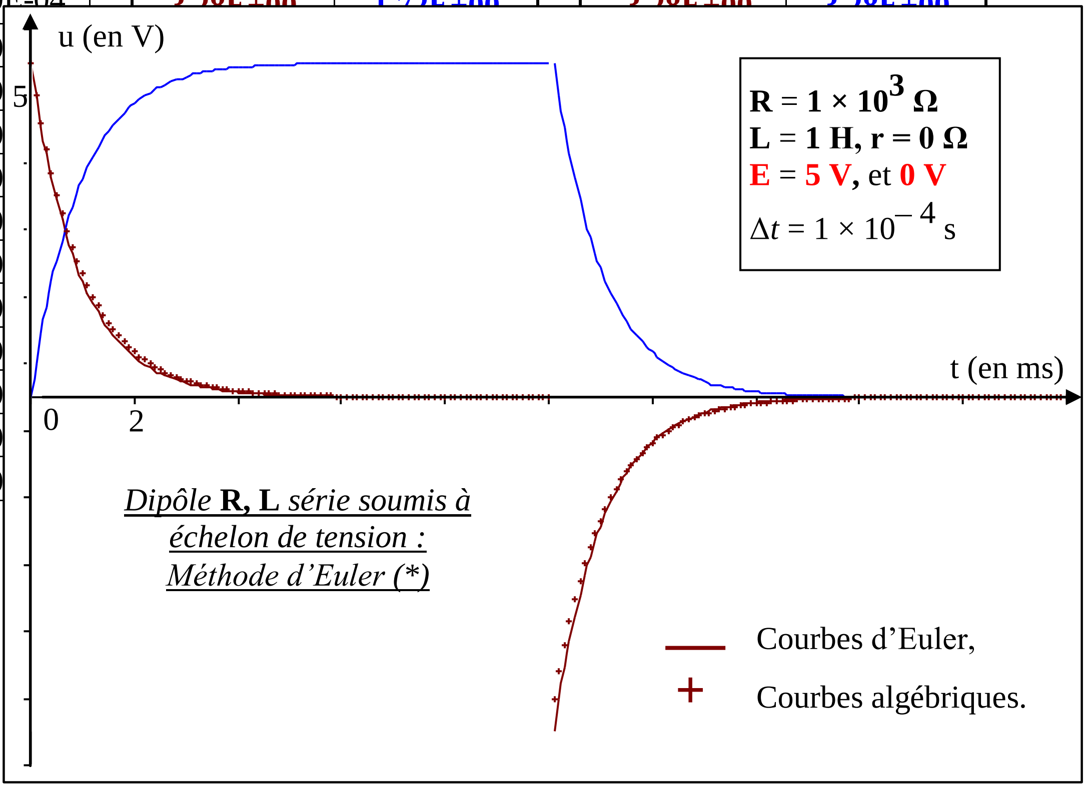
État du courant $\mathbf{i}(t+\Delta t)$ à l'instant $t+\Delta t$.

« pas » Δt

Avec $\mathbf{i}\,(0) = 0$ et $\mathbf{E} = 5$ **V** à l'établissement,

$\mathbf{i}\,(0) = \frac{\mathbf{E}}{(\mathbf{R}+\mathbf{r})}$ et $\mathbf{E} = 0$ **V** à l'extinction.

État	*t* en s	Établissement du courant $u_L(t)$ en V	Établissement du courant $u_R(t)$ en V	Extinction du courant $u_L(t)$ en V	Extinction du courant $u_R(t)$ en V
1	0,00E+00	5,00E+00	0,00E+00	-5,00E+00	5,00E+00
2	1,00E-04	4,50E+00	5,00E-01	-4,50E+00	4,50E+00
3	2,00E-04	4,05E+00	9,50E-01	-4,05E+00	4,05E+00
4	3,00E-04	3,65E+00	1,36E+00	-3,65E+00	3,65E+00
5	4,00E-04	3,28E+00	1,72E+00	-3,28E+00	3,28E+00
6	5,00				
7	6,00				
8	7,00				
9	8,00				
10	9,00				
11	1,00				
12	1,10				
13	1,20				
14	1,30				
15	1,40				
16	1,50				



*Dipôle **R, L** série soumis à échelon de tension : Méthode d'Euler (*)*

(*) Les courbes de $\mathbf{u_R}$ = **R i** et de $\mathbf{u_L}$ sont volontairement représentées conformément au tableau de valeurs. Les colonnes Δ**i** et Δ$\mathbf{u_L}$ ne sont pas présentes pour plus de clarté, mais nécessaires aux calculs.

Remarques

- Là encore c'est l'évolution de **i**(*t*) qui fait l'objet de l'étude théorique. On peut également travailler à partir de $\mathbf{u_R}(t)$, voire $\mathbf{u_L}(t)$.

$$\mathbf{u_{GBF} = u_R + u_L}$$

$$\mathbf{E = L\frac{di}{dt} + (R+r)\,i.}$$

$$u_R = R\,i$$

$$\mathbf{E = \frac{L}{R}\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{R}\,u_R.}$$

$$E = u_R + u_L \qquad du_R = -du_L$$

$$\mathbf{\frac{(R+r)}{R}E = \frac{L}{R}\frac{du_L}{dt} + \frac{(R+r)}{R}\,u_L.}$$

- Comme dans le cas du dipôle R, C les solutions algébriques ne sont pas à retenir mais peuvent faire l'objet d'une vérification. *ex* :

« $u_R = \dfrac{RE}{(R+r)}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)\,t}{L}}\right)$ *est solution de* $E = \dfrac{L}{R}\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{(R+r)}{R}\,u_R$ ».

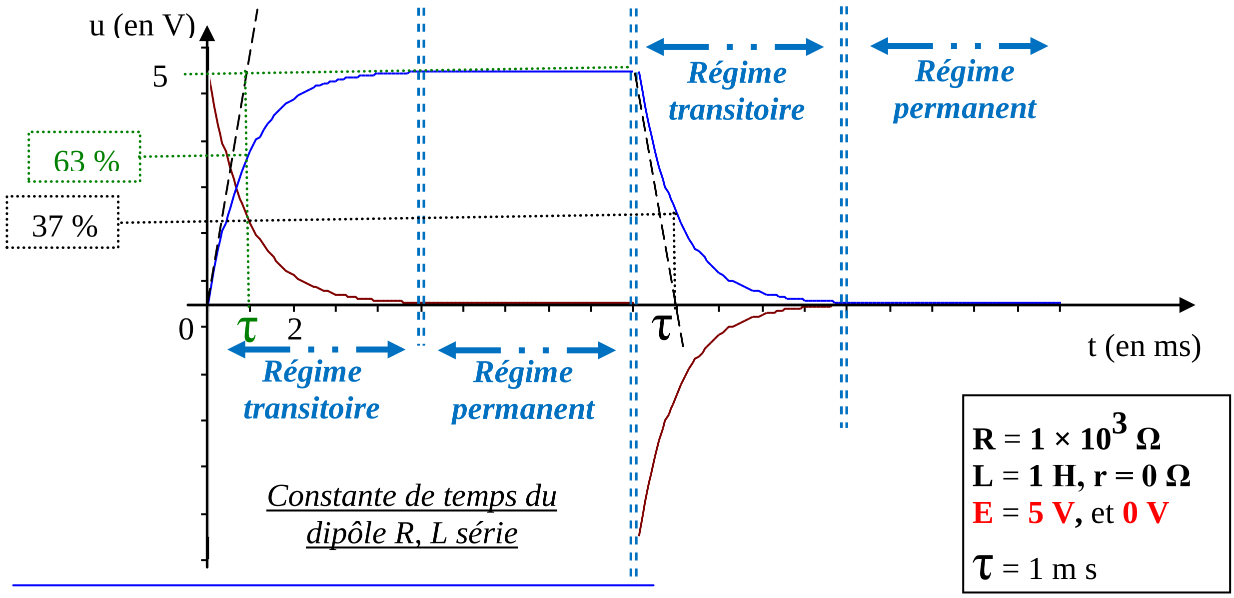
$$
\begin{array}{ll|l}
\dfrac{du_R}{dt} & = \dfrac{RE}{L}\,e^{-\frac{(R+r)\,t}{L}} & \times\dfrac{L}{R} \\
 & & + \\
u_R & = \dfrac{RE}{(R+r)}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)\,t}{L}}\right) & \times\dfrac{(R+r)}{R} \\
\hline
\multicolumn{2}{l|}{E\,e^{-\frac{(R+r)\,t}{L}} + E\left(1 - e^{-\frac{(R+r)\,t}{L}}\right)} & = E.
\end{array}
$$

L'équation est vérifiée !

III. Constante de temps du dipôle R, L série

Les évolutions temporelles des grandeurs électriques en dipôles R, L série sont semblables à celles du dipôle R, C série. Elles font apparaître également ces deux régimes, « ***transitoire*** » des grandeurs qui varient, et « ***permanent*** » lorsqu'elles sont constantes. Seul le régime transitoire nécessite une évaluation de sa durée : C'est le rôle de la « ***constante de temps*** τ ». La physique de l'établissement ou de l'extinction du courant au sein du dipôle étant la même, cette constante de temps τ est caractéristique des éléments du dipôle, non de son état de fonctionnement. *Le régime transitoire dure environ 5τ*.

La détermination de τ est possible graphiquement. À τ, Les grandeurs sont à 63 % du final en établissement de courant, à 37 % en extinction. C'est également l'abscisse de l'intersection du régime permanent et de la tangente à l'origine du signal.



Constante de temps du dipôle R, L série

En supposant le solénoïde idéal (r = 0 Ω), il n'agit par auto induction que lors du régime transitoire, au cours duquel sa tension u_L subitement non nulle, va finalement s'annuler. Cette tension u_L a un signe qui dépend du comportement du GBF en créant « un contre pouvoir ». Elle est positive en extinction et négative à l'établissement. Si le solénoïde n'est pas idéal, son comportement en régime permanent est comparable à celui de la résistance R.

Quant à cette résistance R, sa tension u_R est « au régime transitoire près » celle du générateur puisque alors le solénoïde n'agit plus. Elle partage ou non cette tension u_{GBF}=E avec la résistance r éventuelle du solénoïde.

On peut également calculer τ à partir des caractéristiques du dipôle :

(en s) (en H) (en Ω)

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Ce rapport est un temps et ne dépend que des caractéristiques électriques du dipôle. Il est possible de mener une analyse dimensionnelle à partir de l'une des équations différentielles par exemple : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \left[\frac{di}{dt}\right] + \left[\frac{i}{\tau}\right] \quad \Rightarrow \text{dt} = \tau = \text{T}$ *ou*

$$[\tau] = \left[\frac{L}{R}\right] = \frac{L}{R} = \frac{i}{u} \times \frac{u \quad dt}{di} = T\,.$$

<u>Annexe</u> *<u>Énergie du solénoïde</u>*

à un instant t, l'énergie électrique aux bornes du solénoïde est :

$$E_L = \int_0^t P\,dt = \int_0^t u_L\ i\,dt = \int_0^t L\frac{di}{dt}\ i\,dt = L\int_0^t i\,di = \left.\frac{Li^2}{2}\right|_0^t = \frac{Li(t)^2}{2} - \frac{Li(0)^2}{2C}$$

avec P la puissance électrique du solénoïde **idéal**.

Au terme du régime transitoire d'établissement du courant, i(0) = 0 et $i(t) = \frac{E}{R+r}$, l'énergie magnétique emmagasinée par le solénoïde est $E_L = \frac{Li(t)^2}{2} = \frac{LE^2}{2(R+r)^2}$.

Au terme du régime transitoire d'extinction du courant, $i(0) = \frac{E}{R+r}$ et i(t) =0, l'énergie magnétique libérée par le solénoïde est $E_L = -\frac{Li(0)^2}{2} = -\frac{LE^2}{2(R+r)^2}$.

À un instant quelconque : $\boxed{\mathbf{E_L(t) = \frac{Li(t)^2}{2}}}$.