

Le dipôle R, L, C série

chap. 3

Jallu Laurent

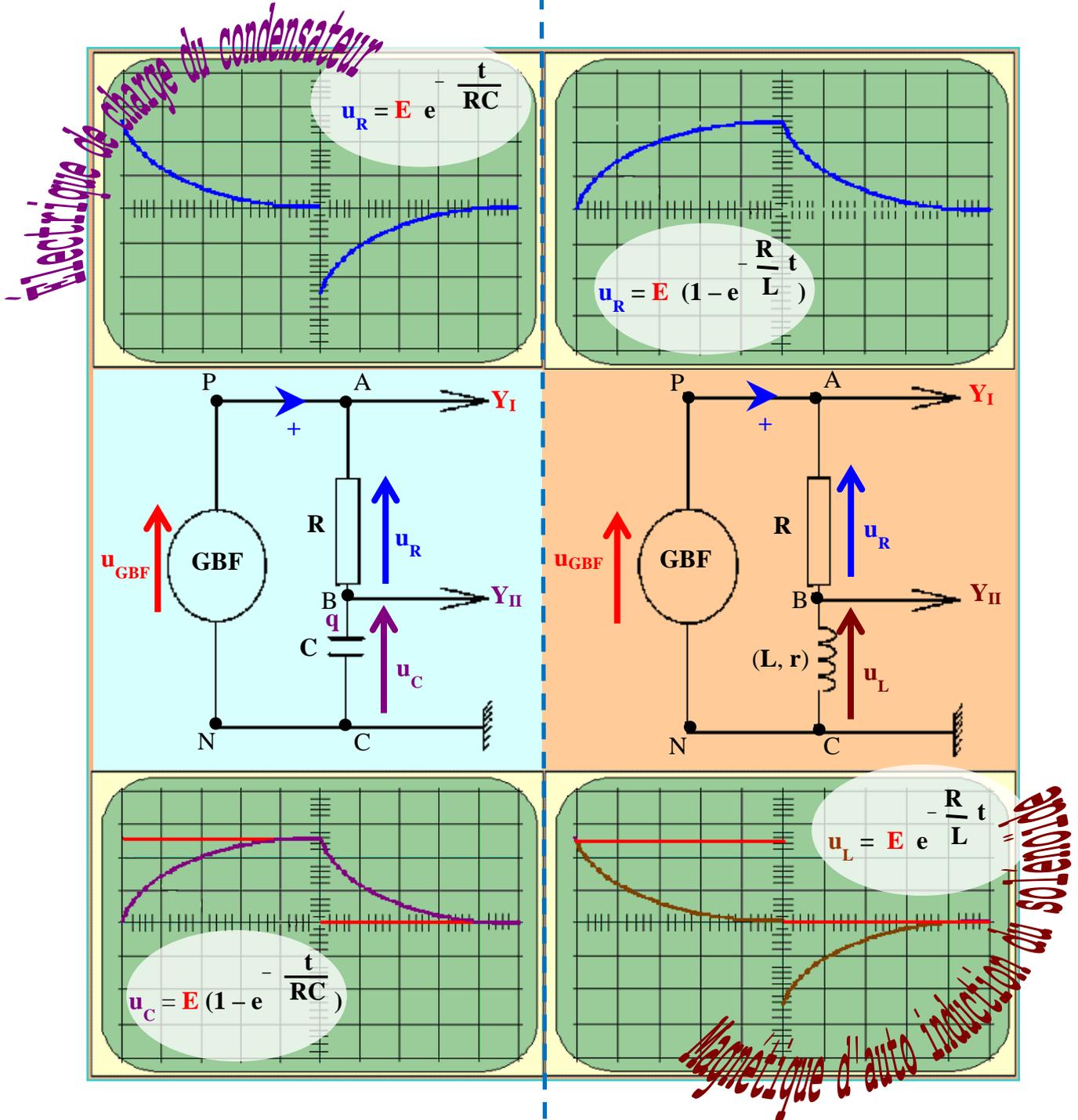
I.	Le dipôle R, L, C série	2
•	Présentation	2
▪	Interprétation microscopique	4
II.	Le cas « idéal » du dipôle L, C série	5
•	Étude théorique	5
•	Bilan énergétique	9
III.	Le cas « réel » du dipôle R, L, C série	10
•	Ce qui change	10
•	Par méthode d'Euler	12



Le dipôle R, L, C série

I. Le dipôle R, L, C série

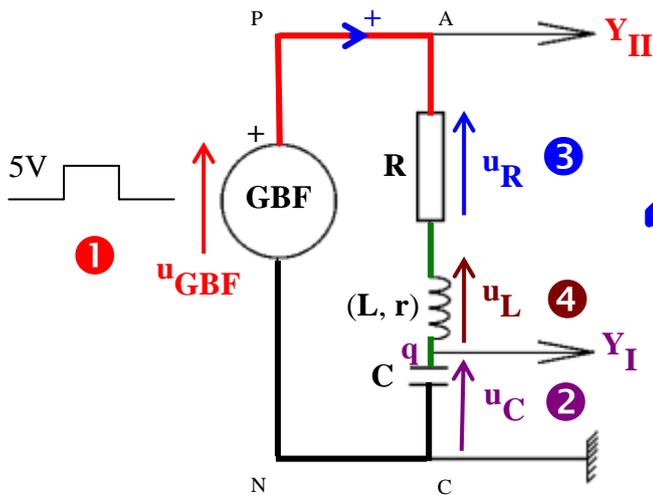
- Présentation : « L'association de deux comportements ... »



$$\tau_C = RC$$

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

« ... Au sein du même dipôle R, L, C série »



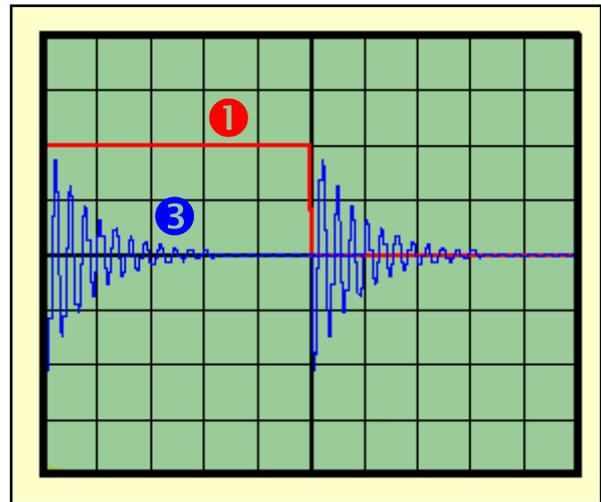
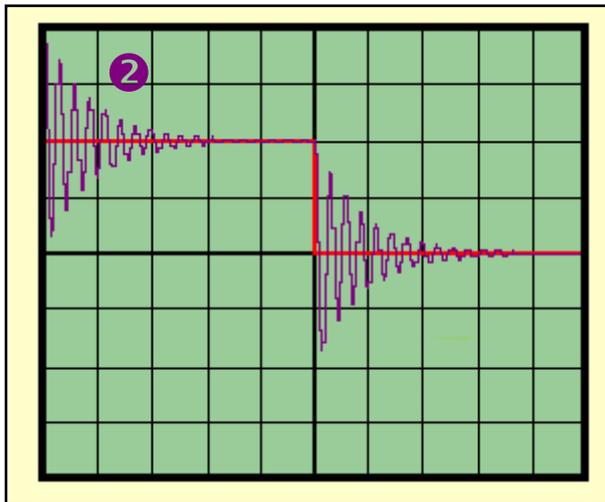
$$u_R = R i$$

$$u_L = r i + L \frac{di}{dt}$$

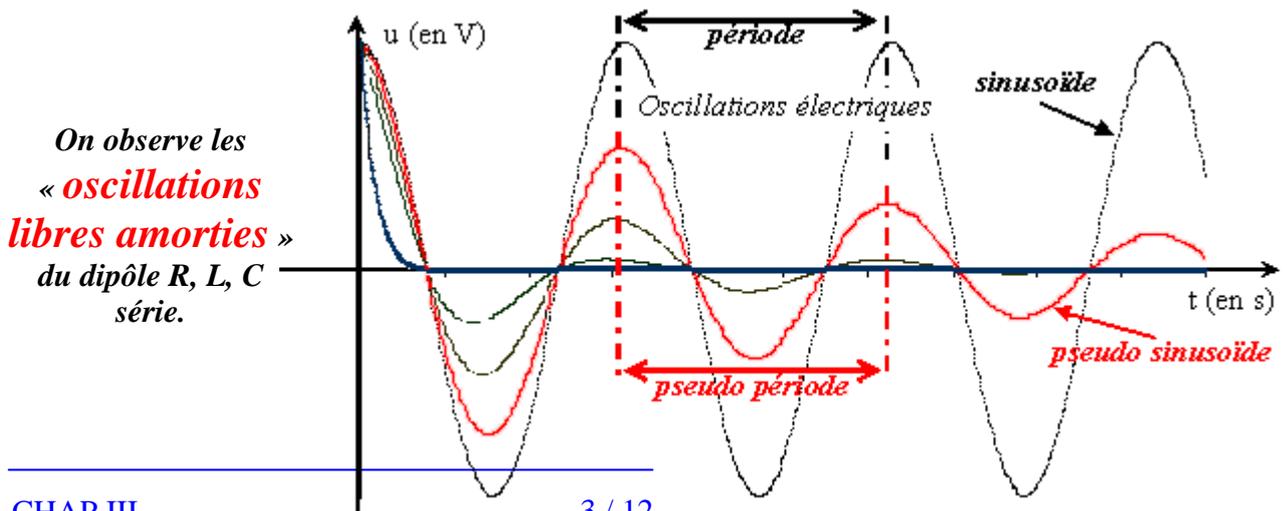
$$u_C = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$u_{GBF} = E \quad \text{avec} \quad E = 0 \quad \text{ou} \quad 5 \text{ V}$$

$$u_{GBF} = u_{PN} = u_{AC} = u_R + u_L + u_C$$



Aucun de ces oscilloscopes ne ressemble aux phénomènes précédemment observés. Par contre les tensions u_C , image à $\frac{1}{C}$ près de la charge q du condensateur et u_R image à R près de l'intensité i , présentent toutes deux des « oscillations électriques amorties ». Les courbes sont en effet « pseudo sinusoïdales » de pseudo période T_0 indépendante du générateur. Le dipôle oscille librement et T_0 ne dépend que des caractéristiques électriques L et C . La résistance R n'agit que sur l'amortissement des oscillations qui s'éteignent si elle augmente.



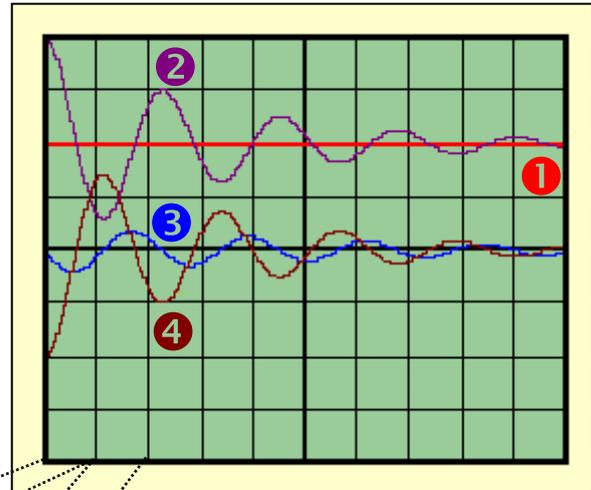


▪ Interprétation microscopique

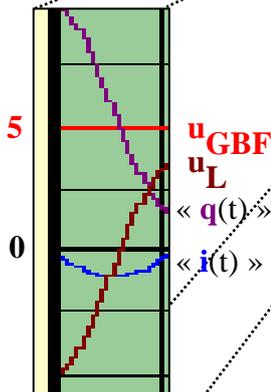
Pour comprendre les oscillations, observons le pallier en ❶ $u_{GBF} = 5V$. Le cas $u_{GBF} = 0V$

est semblable à celui-ci : On remarque,

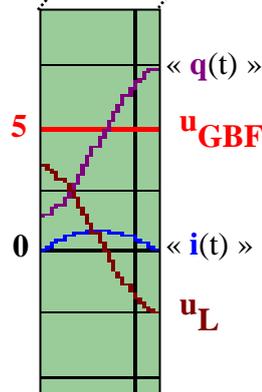
- les oscillations de u_C en ❷ et u_R en ❸ sont « en opposition de phase », les maxima de l'une correspondent aux minima de l'autre.
- La tension u_C non nulle à la fin, montre une « charge oscillante » du condensateur.
- Cette charge définitive q n'est pas la charge maximale mais celle autour de laquelle $q(t)$ évolue.
- La somme de u_R , u_L et u_C est égale à $5V$ tension u_{GBF} .
- u_R , u_L et u_C ont des amplitudes qui faiblissent et deviennent constantes.



divisions
gauches de
l'oscilloscope



divisions
suivantes de
l'oscilloscope



... Lorsque $i(t)$ est négative, la charge $q(t)$ du condensateur décroît. La tension du solénoïde u_L alors négative et responsable de cette diminution, s'inverse et devient positive. Elle s'oppose ainsi à la diminution de $q(t)$. Lorsque u_L est maximale, le solénoïde parvient à inverser l'évolution du système et amorce l'augmentation de $q(t)$ en rendant $i(t)$ positive ...

... Ainsi $i(t)$ devient positive, la charge $q(t)$ du condensateur croît désormais. La tension du solénoïde u_L positive au début, cause de cette augmentation, réagit et devient négative. Elle s'oppose maintenant à l'augmentation de $q(t)$. Lorsque u_L devient minimale, le solénoïde inverse l'évolution et amorce une nouvelle diminution de $q(t)$ par l'intensité $i(t)$ négative ...

La charge $q(t)$ oscille autour de sa valeur finale $q = CE, E$ seule tension de charge lorsque le courant i ne circule plus. Sinon cette tension de charge est « $E + u_L$ » responsable des oscillations de $q(t)$ autour CE , lorsque u_L module par son comportement la tension du GBF E .

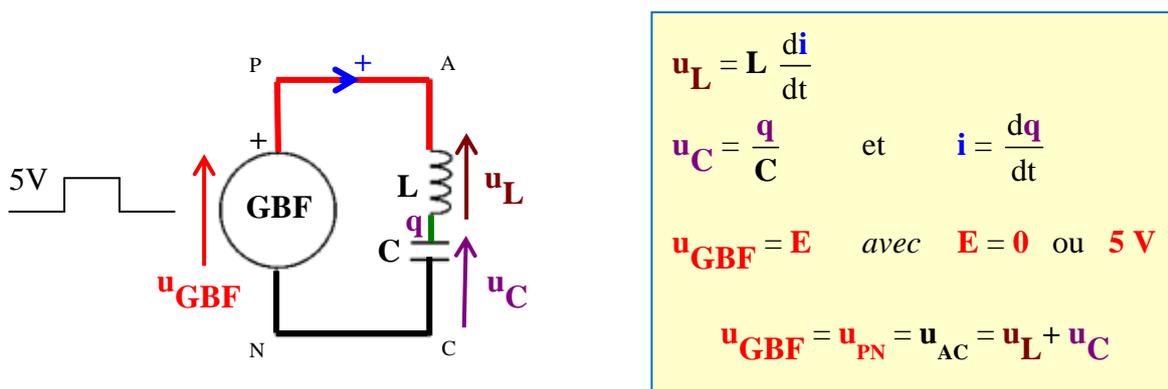
Les courbes de u_C et u_L sont en « opposition de phase » car les comportements respectifs sont contradictoires. L'augmentation de l'une provoque la diminution de l'autre : « $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$ donc $u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$ avec un solénoïde idéal ». L et C jouent un rôle conséquent sur le rythme de ces oscillations.

La résistance **R** éteint les oscillations électriques, en s'opposant à la circulation des charges. Elle résiste à leurs variations au sein du condensateur. La réplique du solénoïde, proportionnelle à ces variations, est à son tour atténuée. La période à suivre sera de moindre amplitude. Les fluctuations de la charge du condensateur sont de moins en moins perceptibles, tout comme les fluctuations de la tension induite du solénoïde responsable de ces observations. La résistance n'a certes pas d'influence sur le rythme de l'oscillateur, mais sur son amplitude. Plus elle est grande, moins durable sera l'oscillateur électrique.

Enfin, la tension **E = 5V** du **GBF** qui lance la charge, n'affecte que la hauteur de ses oscillations. Cette tension est celle du condensateur en fin de cycle. Lorsqu'il s'efface en basculant à **0V**, il en provoque la « *décharge oscillante* » dont l'interprétation est identique à celle-ci.

II. Le cas « idéal » du dipôle L, C série

Si la résistance est absente du dipôle précédent, alors semble-t-il, les oscillations sont permanentes. Le point commun réside dans la période T_0 de ces oscillations qui ne dépend que des caractéristiques L et C. L'oscillation électrique de la tension u_C aux bornes du condensateur admet pour valeur moyenne celle u_{GBF} du générateur, « en charge » **E = 5V**, « en décharge » **0V**. Les tensions u_R et u_L oscillent quant à elles, autour d'une valeur moyenne nulle quelle que soit la situation du **GBF**.



• Étude théorique

$$E = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \text{ soit } \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC} \text{ ou } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}}$$

On retrouve ces résultats par un traitement énergétique * :

$$E_e(t) = E_C + E_L = \frac{q(t)^2}{2C} + \frac{Li(t)^2}{2}$$

$$E_e(t) = E_C + E_L = \frac{C u_C^2(t)}{2} + \frac{Li(t)^2}{2}$$

En l'absence de résistance, cette énergie électrique $E_e(t)$ est une constante. Sa dérivée $\frac{dE_e(t)}{dt}$ est nulle !

Or $u(t)$ est fonction du temps :

$$\frac{d[u^2(t)]}{dt} = 2 u(t) \frac{du(t)}{dt} = 2 u u'$$



$$\Rightarrow \frac{2 q(t) \frac{dq}{dt}}{2C} + \frac{2 L i(t) \frac{di}{dt}}{2} = \frac{q(t) \frac{dq}{dt}}{C} + L \frac{dq}{dt} \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2 C u_C(t) \frac{du_C}{dt}}{2} + \frac{2 L i(t) \frac{di}{dt}}{2} = C u_C(t) \frac{du_C}{dt} + L \frac{dq}{dt} \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

(*) Traitement hors énergie du générateur c'est-à-dire lorsque $E = 0 \text{ V}$.



Solution algébrique

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0 \quad (\text{cas } E = 0\text{V})$$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

$$\Leftrightarrow y'' = -\omega_0^2 y \Leftrightarrow \frac{y''}{y} = -\omega_0^2$$

$$\frac{y''}{y} = -\omega_0^2$$

$$y = y_m \cos(\omega_0 x + \varphi_0)$$

La fonction $y(x)$ est ici la charge $u_C(t)$.

Il est fondamental de reconnaître une équation différentielle d'« **oscillateur harmonique** » dont la solution est de forme sinusoïdale. C'est alors :

$$u_C = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\text{ssi } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{c'est-à-dire } (LC\omega_0^2=1)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}$$

Où « ω_0 » est la « **pulsation propre** » de l'oscillateur harmonique, mesurée en rad.s^{-1} .

C'est une vitesse angulaire $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ qui correspond à la vitesse de balayage de

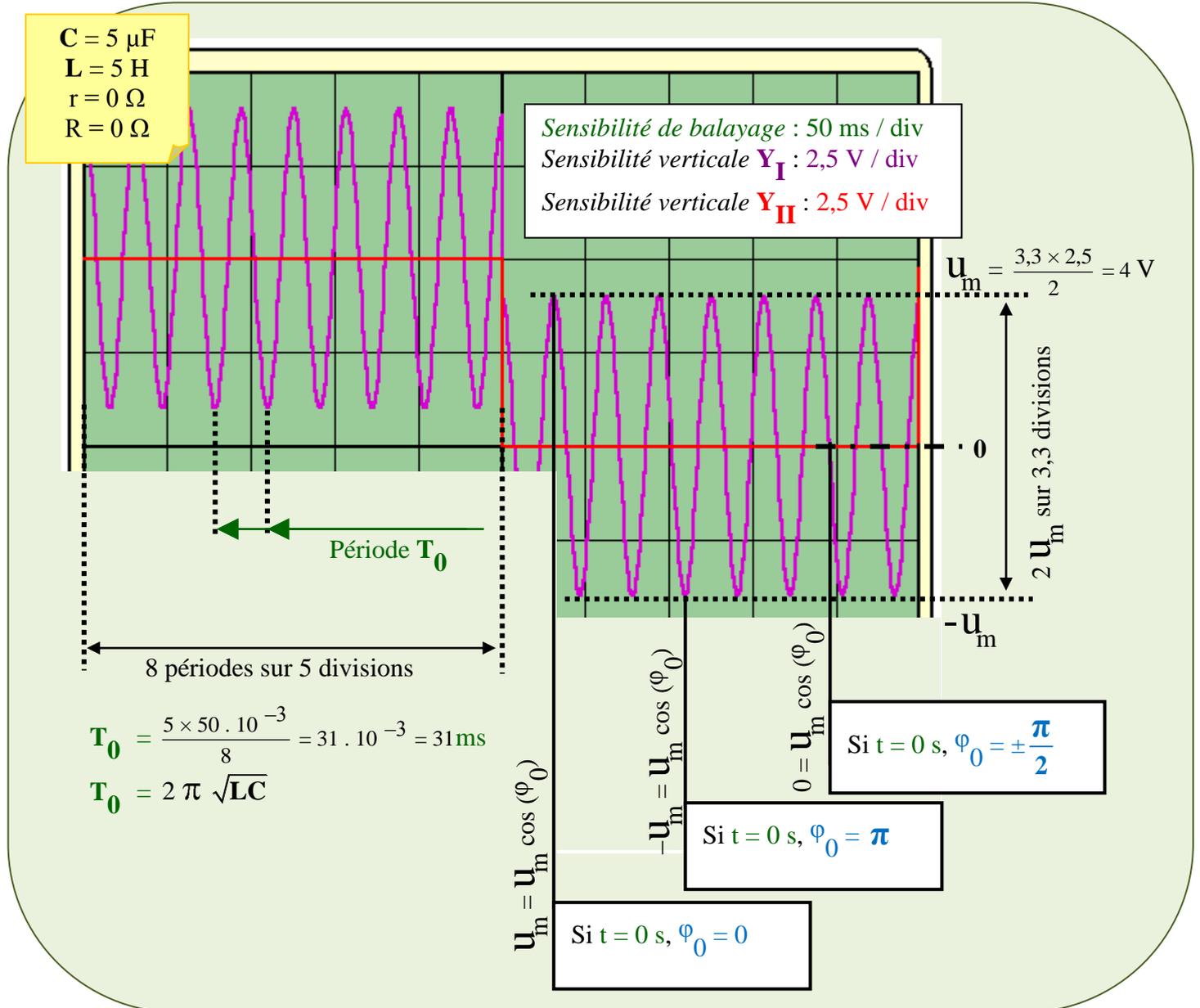
la fonction. T_0 est la « **période propre** » de l'oscillateur harmonique mesurée en **s**.

« $\omega_0 t$ » est l'angle balayé durant t , en **rad**. Avec φ_0 , « **phase initiale** » également en **rad** (entre 0 et π) ou angle à l'instant $t = 0 \text{ s}$, il détermine la « **phase à**



l'instant $t \gg (\omega_0 t + \varphi_0)$. La phase traduit par son cosinus, l'état de la fonction entre $\pm U_m$.

U_m est l'amplitude maximale de u_C . Elle a la même unité que u_C le Volt, et est arbitrairement choisie positive. La tension u_C évolue entre $+U_m$ et $-U_m$.



Solution numérique

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

Méthode d'Euler

Cette équation différentielle du second ordre ne permet pas l'écriture directe de l'évolution temporelle de u_C en accroissements finis Δu_C en fonction de Δt . On la transforme en 2

accroissements finis du premier ordre par changement de variable $u'_C = \frac{du_C}{dt}$. D'où :

$$u'_C = \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{du'_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0 \quad \text{soit}$$

$$u'_C = \frac{\Delta u_C}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta u'_C}{\Delta t} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

avec $u'_C(t + \Delta t) = u'_C(t) + \Delta u'_C(t)$
et $u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \Delta u_C(t)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} u'_C(t + \Delta t) &= u'_C(t) + \Delta u'_C(t) \\ u_C(t + \Delta t) &= u_C(t) + \Delta u_C(t) \\ \Delta u'_C(t + \Delta t) &= -\frac{u_C(t + \Delta t)}{LC} \Delta t \\ \Delta u_C(t + \Delta t) &= u'_C(t + \Delta t) \Delta t \end{aligned}$$

avec $\Delta u'_C(t) = -\frac{u_C(t)}{LC} \Delta t$
 $\Delta u_C(t) = u'_C(t) \Delta t$
et $u'_C(t)$
 $u_C(t)$

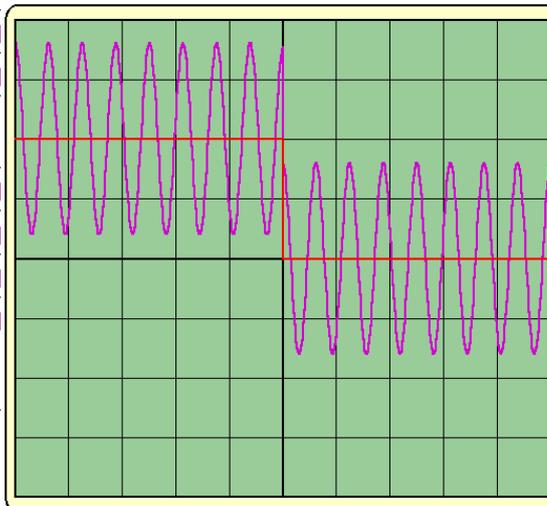
État de la tension $u_C(t)$
et de sa dérivée $u'_C(t)$ à
l'instant $t + \Delta t$.

État de la tension $u_C(t)$
et de sa dérivée $u'_C(t)$ à
l'instant t .



Avec $u_C(0) = 4 \text{ V}$ et $u'_C(0) = 0 \text{ V.s}^{-1}$. (exemple de l'oscilloscope précédent)

État	t en s	$u_C(t)$ en V	$\Delta u'_C(t)$ en V/s	$u'_C(t)$ en V/s	$\Delta u_C(t)$ en V
1	0,00E+00	4,00E+00	-2,40E+00	0,00E+00	0,00E+00
2	1,50E-05	4,00E+00	-2,40E+00	-2,40E+00	-3,60E-05
3	3,00E-05	4,00E+00	-2,40E+00	-4,80E+00	-7,20E-05
4	4,50E-05	4,00E+00	-2,40E+00	-7,20E+00	-1,08E-04
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	2,70E-04	3,99E+00	-2,40E+00	-1,08E+01	-1,62E-04
20	2,85E-04	3,99E+00	-2,40E+00	-1,32E+01	-1,98E-04
21	3,00E-04	3,99E+00	-2,40E+00	-1,56E+01	-2,34E-04
22	3,15E-04	3,99E+00	-2,40E+00	-1,80E+01	-2,70E-04
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮



• Bilan énergétique (cas $E = 0V$)

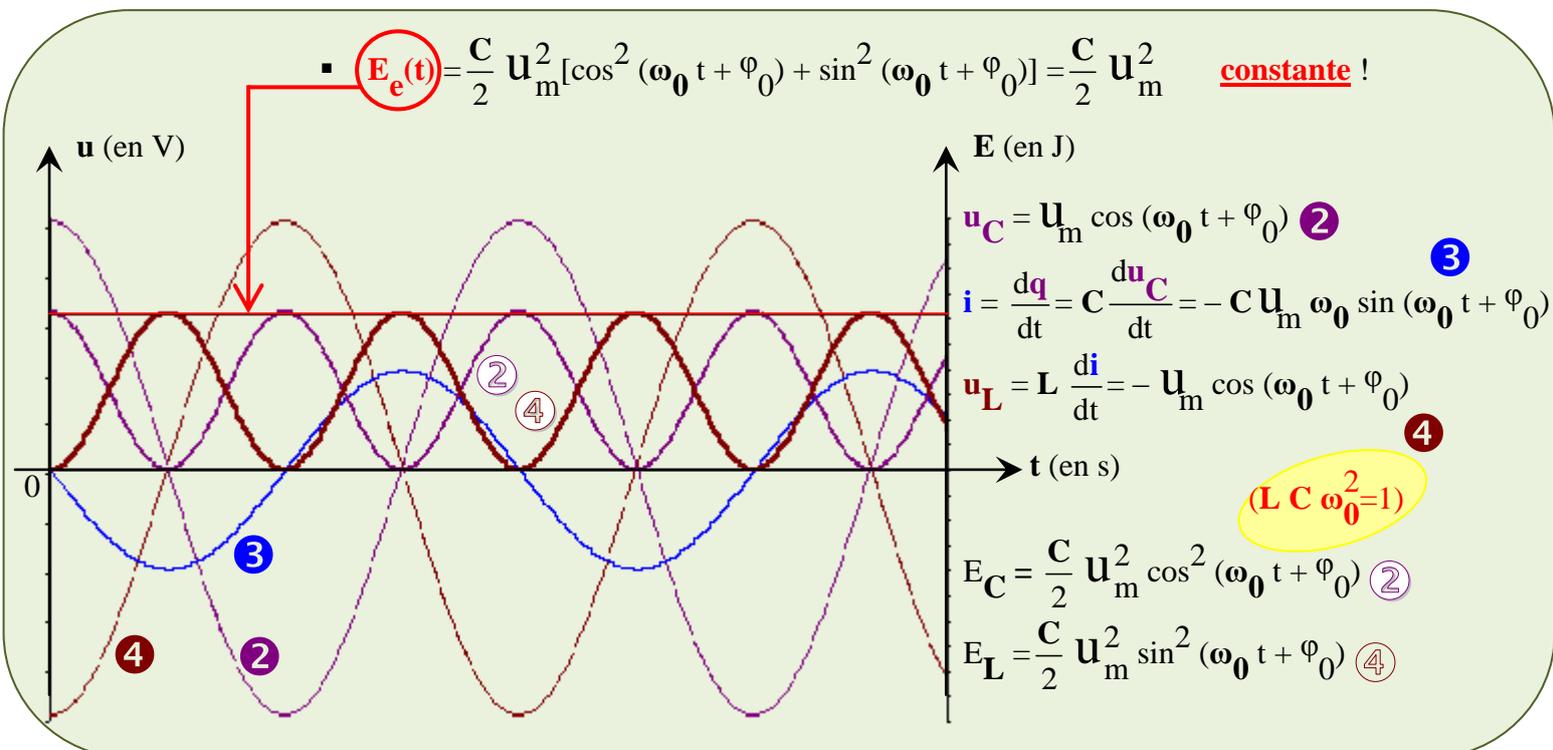
② ▪ $E_C(t) = \frac{C u_C^2(t)}{2} = \frac{C}{2} U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ et $E_L(t) = \frac{L i(t)^2}{2} = \frac{LC^2}{2} \left(\frac{du_C}{dt} \right)^2$

$E_L(t) = \frac{LC^2}{2} [-U_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)]^2 = \frac{LC^2}{2} U_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

④ ▪ $E_L(t) = \frac{C}{2} U_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$ car $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$E_e(t) = E_C + E_L = \frac{C}{2} U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{C}{2} U_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$

▪ $E_e(t) = \frac{C}{2} U_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{C}{2} U_m^2$ **constante !**



- Les énergies E_C du condensateur et E_L du solénoïde sont en opposition de phase comme les tensions respectives u_C et u_L . Un temps stockée sous forme électrique dans le condensateur, l'énergie totale E_e est transférée au solénoïde sous forme magnétique avant d'y retourner. Ce qui se produit deux fois par période T_0 des tensions.
- Le sinus vaut 1 lorsque le cosinus s'annule et vice et versa. L'énergie totale E_e constante correspond aux maxima de l'une et de l'autre des énergies E_C et E_L :

$$E_e = \frac{C}{2} U_m^2 = \frac{L}{2} i_m^2 \quad (i_m = C U_m \omega_0)$$

- Les oscillations sont entretenues par cet effet de vases communicants entre solénoïde et condensateur. Les caractéristiques L et C en fixent le rythme. $T_0^2 \propto \tau_L \tau_C = LC$.



III. Le cas « réel » du dipôle R, L, C série

- Ce qui change

Dans la réalité, la technologie actuelle ne permet pas de négliger la résistance du dipôle. La « supraconductivité » n'est pas encore le lot commun de nos circuits électriques et il est naturel de composer avec des composants **inductifs**, **capacitifs** mais aussi **résistifs** comme les simples cordons de liaison du circuit. Le cas réel est celui des « **oscillations libres amorties** » observé en début de chapitre. **La résistance est un facteur dissipatif de l'énergie du dipôle. Elle provoque graduellement, par effet Joule, l'extinction des oscillations libres.** Une partie de l'énergie est transformée en chaleur au sein du dipôle et perdue par le système à chaque période.

Cependant et selon la valeur de la résistance, **l'oscillation reste « libre »** c'est-à-dire de **période propre** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}$ (ou $LC\omega_0^2=1$) caractéristique des seuls capacité C et

solénoïde L. Lorsque cette valeur est « faible », la résistance R n'a d'action que sur l'amplitude des oscillations (à « forte » résistance, la période croît, les oscillations ne sont plus « linéaires » ou de période constante). Au-delà, les oscillations disparaissent pour laisser place à un dipôle « capacitif » R, C série en charge ou décharge selon l'échelon du générateur de tension.

On peut penser légitimement qu'une résistance **R « forte »**, va ralentir le dipôle R, C dans son évolution ($\tau_C = RC$) et surtout annihiler l'effet d'auto induction de la partie R, L ($\tau_L = \frac{L}{R}$). **Le circuit est alors « capacitif »**. Le solénoïde « s'effaçant » dans un régime transitoire de plus en plus long, aux grandes valeurs de R les oscillations du condensateur disparaissent. C'est à « **faible** » résistance R que le solénoïde est privilégié par un temps de « contre réaction » très court au regard de celui du condensateur : **Le circuit est « inductif »**. La charge évolue de plus en plus rapidement, mais ses oscillations sont amorties dans un « **régime pseudo sinusoïdale** » de « **pseudo période** » T_0 .

Ces conclusions doivent apparaître dans l'équation d'évolution temporelle du système. Le modèle mathématique de l'équation différentielle traduit le modèle physique que l'on vient de décrire. C'est pour le « physicien » une autre façon d'utiliser l'outil mathématique.

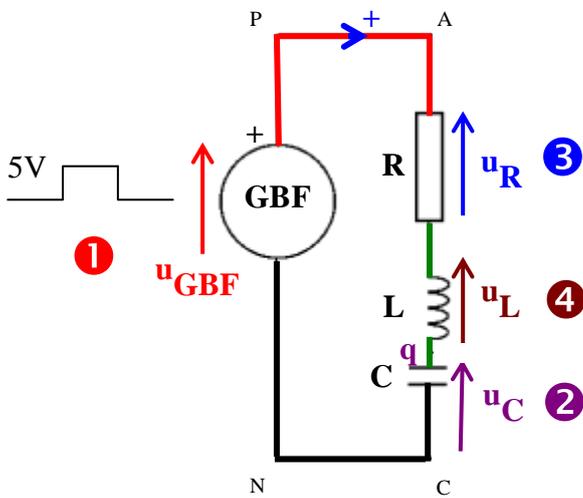
À forte résistance, cas limite du dipôle R, C série : $E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$.
 À faible résistance, cas limite du dipôle L, C série : $E = L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$.
 Deux comportements limites d'un seul et même dipôle : $E = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$.

pour information

La solution algébrique est sinusoïdale d'amplitude variable (pseudo sinusoïde) qui s'impose à forte résistance comme une charge ou une décharge : Pour $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ avec $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$

$E = 0 \text{ V en décharge : } q = C E_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ pour $0 = \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC}$
 pour $\frac{E}{L} = \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC}$

$$\mathbf{E} = 5 \text{ V en charge : } \mathbf{q} = \mathbf{C E} \left[1 - e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) \right]$$



$$\begin{aligned} u_R &= R i \\ u_L &= L \frac{di}{dt} \\ u_C &= \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} \\ u_{GBF} &= E \quad \text{avec} \quad E = 0 \quad \text{ou} \quad 5 \text{ V} \\ u_{GBF} &= u_{PN} = u_{AC} = u_R + u_L + u_C \end{aligned}$$

Il est bien sûr possible d'établir cette équation différentielle ainsi que ses solutions par le raisonnement mathématique. Contentons nous de vérifier l'exactitude des solutions proposées. En charge par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{C E} \left[1 - e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) \right] && \times \frac{1}{\mathbf{LC}} \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \mathbf{C E} \left(\frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}} e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \right) \cos(\omega t + \varphi_0) + \mathbf{C E} e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \omega \sin(\omega t + \varphi_0) && + \times \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \\ \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} &= -\mathbf{C E} \left(\frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}} \right)^2 e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) - \mathbf{C E} \omega \frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}} e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \sin(\omega t + \varphi_0) && + \\ &\quad + \mathbf{C E} \omega^2 e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) && \times 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{L}} \left[1 - e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) \right] + \frac{\mathbf{C E}}{2} \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \right)^2 e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &+ \mathbf{C E} \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \omega e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \sin(\omega t + \varphi_0) - \mathbf{C E} \left(\frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}} \right)^2 e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ &- \mathbf{C E} \frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}} \omega e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{L}} \left[1 - \mathbf{LC} \left(\frac{\mathbf{R}}{2\mathbf{L}} \right)^2 \right] e^{-\frac{\mathbf{R t}}{2\mathbf{L}}} \cos(\omega t + \varphi_0) && = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{L}} \end{aligned}$$

• Par méthode d'Euler

$E = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$. Une équation différentielle du second ordre ...

... $q' = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta q'}{\Delta t} + R q' + \frac{q}{LC} = 0$ Deux évolutions temporelles.

$\Rightarrow q'(t + \Delta t) = q'(t) + \Delta q'(t)$ avec $\Delta q'(t) = - \left(R q'(t) + \frac{q(t)}{LC} \right) \Delta t$

$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta q(t)$ $\Delta q(t) = q'(t) \Delta t$

$\Delta q'(t + \Delta t) = - \left(R q'(t + \Delta t) + \frac{q(t + \Delta t)}{LC} \right) \Delta t$ et $q'(t)$

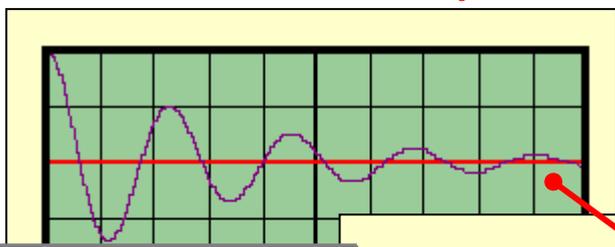
$\Delta q(t + \Delta t) = q'(t + \Delta t) \Delta t$ $q(t)$

État de la charge $q(t)$ et de sa dérivée $q'(t)$ à l'instant $t + \Delta t$.

État de la charge $q(t)$ et de sa dérivée $q'(t)$ à l'instant t .

« pas » Δt

Avec $q(0) = C E_0$ et $q'(0) = i(0) = 0$ donnés.



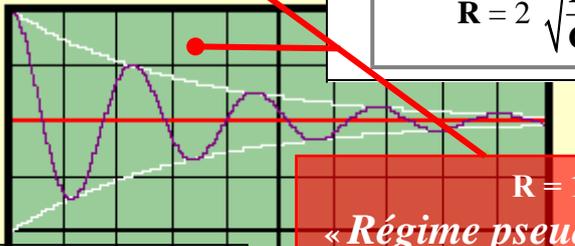
« Impédance d'onde » :

$\sqrt{\frac{L}{C}} = 447 \Omega$

« Limite des 2 régimes » :

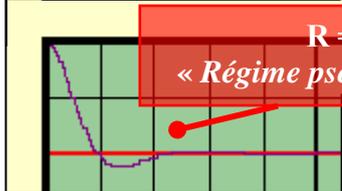
$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 894 \Omega$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$

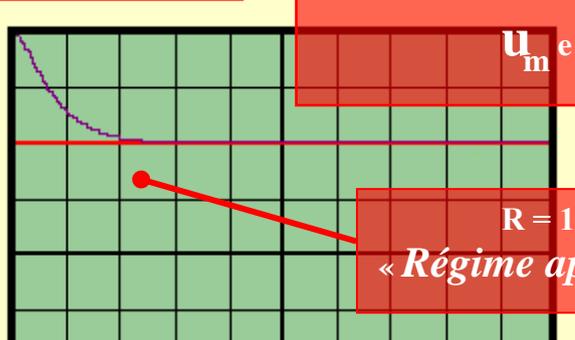


$R = 100 \Omega$
« Régime pseudo périodique »
Avec et sans enveloppe d'amplitude décroissante :

$u_m e^{-\frac{R t}{2L}}$



$R = 500 \Omega$
« Régime pseudo périodique »



$R = 1000 \Omega$
« Régime apériodique »

$L = 1 \text{ H}, r = 0 \Omega, C = 5 \mu\text{F}, T_0 = 0,01\text{s}.$

$u_C(0) = 5 \text{ V}, u'_C(0) = \frac{i(0)}{C} = 0 \text{ V.s}^{-1}.$

Balayage : 6,25 ms / div.

Sensibilité verticale : 2,5 V / div.

« pas » de calcul : $\Delta t = 0,015 \text{ ms}.$