Lycée Galilée Gennevilliers

Mouvement - Cinématique

chap. 7

Jallu Laurent

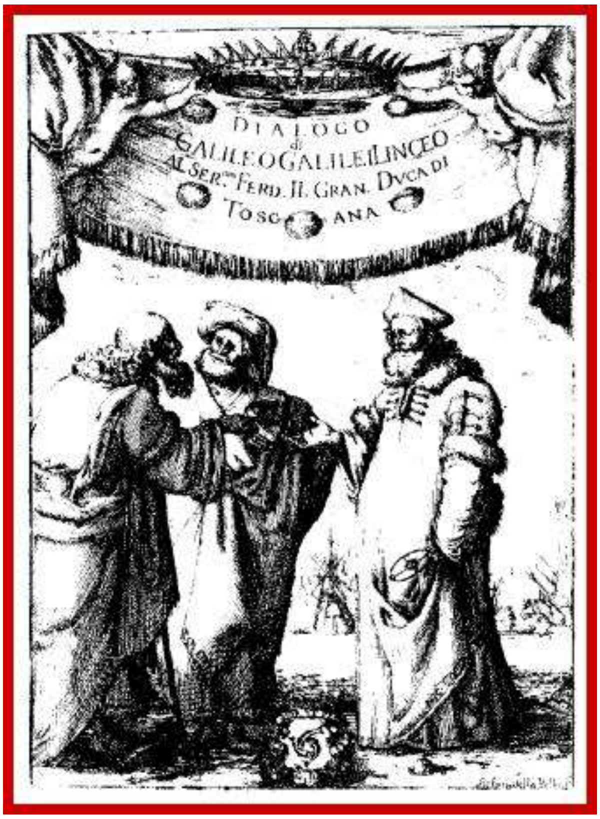
Mouvement – Cinématique

Brachistochrone *: Dans ses travaux, Galilée fait progresser la théorie et l'observation. Il crée avec sa mécanique une rupture avec la précédente physique, en confrontant les lois à l'observation et la mesure.*

C'est la fin de la théorie médiévale de la mécanique imprégnée des dogmes de Platon (424-347 av. J.-C.) et d'Aristote (384-322 av. J.-C.). Galilée (Pise 1564 - Florence 1642) édifie les bases de la mécanique classique de Newton (1643-1727).

Galileo Galilei

- 1590 : ***De Motu*** (Du mouvement)
- 1610 : ***Sidereus Nuncius*** (Le messager céleste),
- 1632 : Le ***Dialogo*** « Dialogue sur les deux principaux système du monde »,
- 1638 : Le ***Discorso*** « Discours mathématique concernant deux sciences nouvelles » (Problèmes fondamentaux de la mécanique …)



Couverture du ***Dialogo*** *(Discours 1632) illustrant le débat cosmologique :* À gauche se trouve **Aristote** ; **Ptolémée** tenant un modèle de sphère géocentrique est au milieu ; À droite se tient **Copernic** avec l'emblème de son système.

Galilée avait compris que pour réussir à faire adopter le modèle copernicien héliocentrique et enlever toute crédibilité au modèle ptoléméen géocentrique, il fallait donner une nouvelle explication du mouvement.

I. Chute des corps et fondements de la cinématique

1. *Origines prégaliléennes de la cinématique*

Les premières définitions rigoureuses et descriptions de divers mouvements datent du XIVe siècle : Thomas Bradwardine (1290 – 1349) et William de Heytesbury (1313 – 1372) du Merton College d'Oxford. Alors que la physique d'Aristote ne fait que qualifier « *la vitesse d'un corps est faible ou grande* », on commence à quantifier en parlant de « *degré de vitesse, degré de chaleur* … », en évoquant l'intensité d'une grandeur physique.

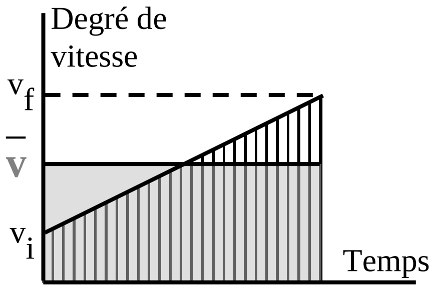
- Bradwardine donne à la vitesse sa première définition, rapport entre distance parcourue **s** et temps **t**,

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{t}}}\ \textit{en notations actuelles.}$$

- Heytesbury crée l'accélération, « *la vitesse de la vitesse* ».
- On découvrit la *règle de Merton ou règle de la vitesse moyenne* selon laquelle la distance parcourue lors d'un MRUA (mouvement rectiligne uniformément accéléré) dont la vitesse initiale est v_i et la vitesse finale v_f, est la même que la distance qui serait parcourue dans le même temps, à la vitesse $\bar{\mathbf{v}}$, moyenne des vitesse v_i et v_f :

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}} = \frac{v_i + v_f}{2}}$$

en notations actuelles.

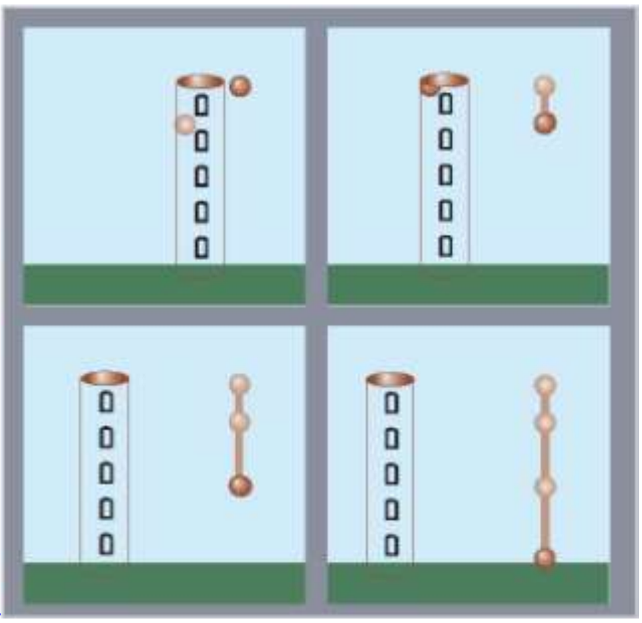


Démonstration géométrique de la règle de Merton :
La distance parcourue est l'aire de l'une des deux figures.

2. *La chute des corps selon Galilée*

Galilée n'est pas le seul (1605 Simon Stevin de Bruges) à mettre en doute la théorie aristotélicienne de la chute des corps selon laquelle les corps lourds tombent plus vite que les légers. Il comprend par ailleurs qu'il étudie le phénomène conduisant à la ***compréhension de tous les mouvements***. Théoriquement et expérimentalement, il étudie la ***chute libre***, **expérience idéalisée**, débarrassée des effets secondaires perturbateurs (frottements …) : **La démarche est nouvelle**.

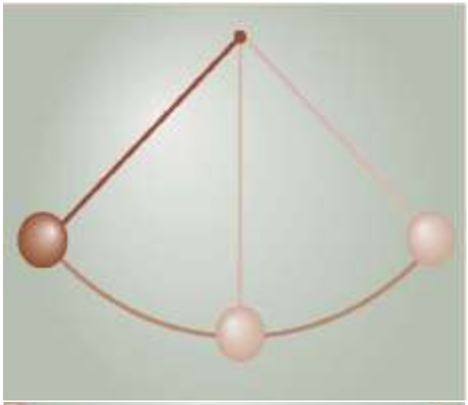
Selon la philosophie d'Aristote : *Si la Terre bouge, quand le grave (corps lourd) tombe du sommet d'une tour, le sol sur lequel est érigée la tour est en mouvement. Cela signifie que, dans le temps nécessaire*



pour que le grave atteigne le sol, le sol lui-même s'est déplacé. Or, nous voyons que le grave frappe le sol au pied de la perpendiculaire tracée du sommet de la tour à la base de celle-ci. Il n'y a aucun doute possible, le grave atteint le sol en un point différent de celui que nous devrions observer si la Terre était en mouvement. La Terre est donc immobile.

Le mouvement de chute libre est trop rapide pour en prendre des mesures. Il faut donc le ralentir dans un mouvement moins rapide. Galilée choisit deux solutions : le mouvement des pendules et le plan incliné.

☑ Mouvement du pendule



Le mouvement d'un pendule pose un problème aux aristotéliciens qui ne peuvent pas l'expliquer : le corps lourd suspendu au bout de la corde va descendre pour retrouver sa place naturelle. Une fois qu'il l'a atteinte, pourquoi remonte-t-il ?

Il est possible de faire une étude plus précise de ce mouvement en utilisant un dispositif dans lequel le mouvement s'apparente à celui du pendule.

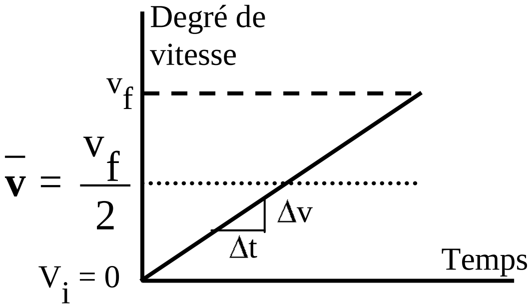
Que va-t-il se passer si la partie droite demeure horizontale ? Par un passage à la limite, Galilée conclut que la bille devrait conserver sa vitesse et rouler indéfiniment : cette constatation est très importante, cela signifie que **le mouvement se continue sans qu'aucune force n'agisse pour le maintenir**.

Pour Aristote, l'état naturel, c'est le repos et une force doit s'exercer pour qu'un objet puisse quitter cet état. Avec les expériences sur les pendules, il faut abandonner cette idée. Le déplacement en mouvement rectiligne à vitesse constante d'un objet dans l'espace ne nécessite par l'intervention d'une force qui le pousserait et le maintiendrait en mouvement. Il n'y a plus de différence qualitative entre repos et mouvement. De ces expériences découlent **un principe d'inertie dont la formulation moderne, plus générale, est due à Newton**.

☑ Mouvement sur le plan incliné

Galilée va se servir du plan incliné pour établir un lien entre le temps **t** et la distance parcourue **s**. En 1604, il énonce deux affirmations qu'il s'efforcera de vérifier expérimentalement :

- « *Je dis qu'un mouvement est uniformément accéléré quand, partant du repos, il reçoit en des temps égaux, des moments* [c'est-à-dire des accroissements] *égaux de vitesse* ».
- « *Les corps en chute libre ont un mouvement rectiligne uniformément accéléré* ».



Mouvement dont la vitesse croît uniformément au cours du temps : Les rapports $\Delta v/\Delta t$ sont constants

Ne pouvant mesurer précisément ni Δv ni Δt, Galilée se tourne vers les mathématiques pour trouver une relation équivalente :

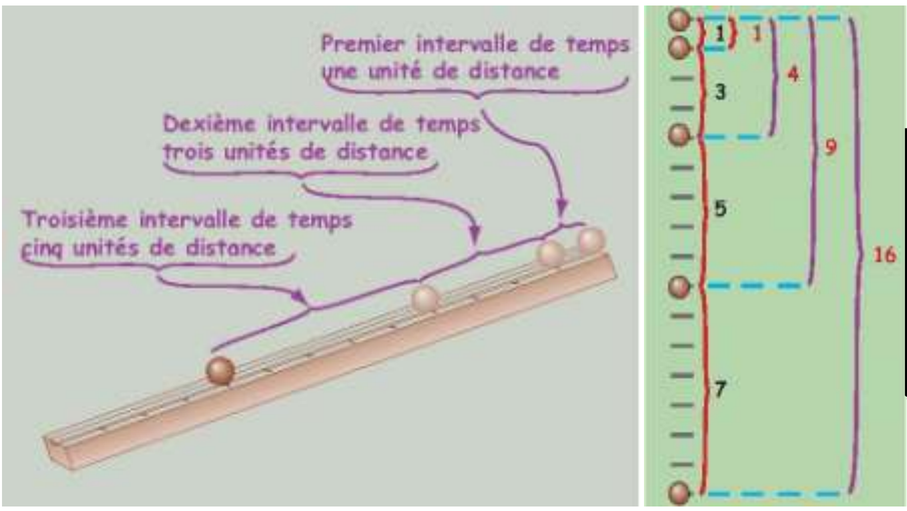
- $s = \bar{\mathbf{v}} \times t$ avec $\bar{\mathbf{v}} = \frac{v_f}{2}$, $s = \frac{v_f}{2} \times t$
- **L'accélération,** définie comme « *la rapidité avec laquelle la vitesse varie c'est-à-dire l'accroissement de vitesse* » $\bar{\mathbf{a}} = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{v_f}{t}$ ou $v_f = \bar{\mathbf{a}} \times t$, il vient :

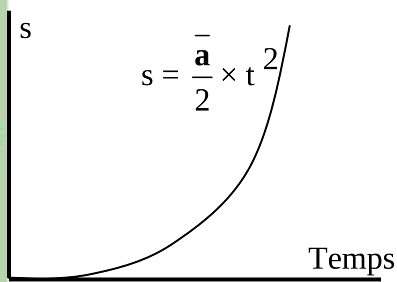
$\boxed{s = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{2} \times t^2}$ *équation horaire du MRUA de vitesse initiale nulle.*

Les distances s parcourues dans ce mouvement sont proportionnelles au carré du temps écoulé t.

Peu probable du haut de la tour de Pise, cet **horaire parabolique** est beaucoup plus facilement mesurable sur le plan incliné pour lequel il fait cette troisième affirmation :

- « *Une bille parfaitement sphérique roulant sur un plan incliné parfaitement lisse possède, comme un corps en chute libre, une accélération constante mais plus petite* ».

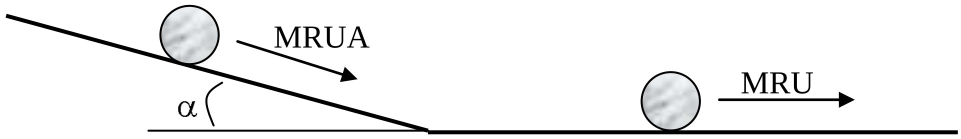




Galilée montre que pour chaque angle d'inclinaison α du plan, l'accélération est constante et dépend de manière croissante de α. Pour une inclinaison de 90°, il extrapole le mouvement de la chute libre :

Tous les corps en chute libre ont la même accélération quelle que soit leur masse.

Dès 1608 il procède à des mesures de la vitesse finale du MRUA en prolongeant le mouvement du plan incliné par un mouvement horizontal qu'il prétend rectiligne uniforme MRU.

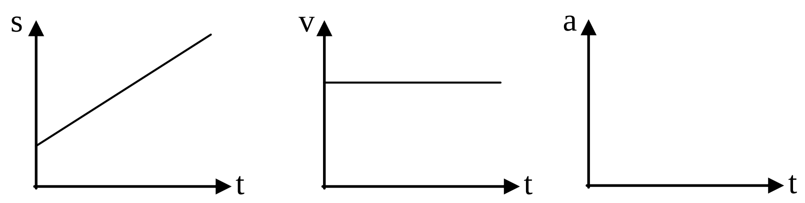


Galilée pressent le principe d'inertie : « … *Un degré de vitesse quelconque, une fois communiqué à un mobile, s'imprime en lui de façon indélébile du seul fait de sa nature, et pourvu que soient supprimées les causes extérieures d'accélération et de ralentissement, ce qui n'a lieu que sur un plan horizontal ; sur un plan descendant, en effet, il existe déjà une cause d'accélération, et sur un plan ascendant une cause de ralentissement ; d'où il suit que le mouvement sur un plan horizontal est éternel ; car s'il est uniforme, il ne s'affaiblit ni ne diminue, et encore moins ne cesse.* » (« *Discours* », Deuxième journée)

3. *Synthèse en géométrie analytique moderne*

☑ Lois du MRU

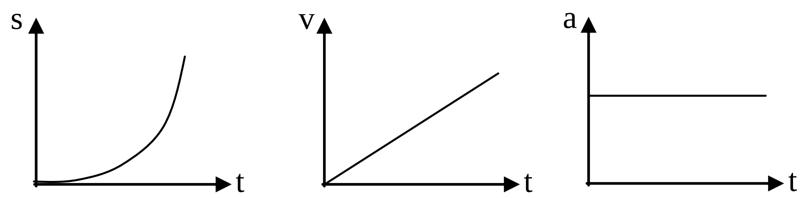
$\mathbf{s = v \times t}$ [m] $\mathbf{v = cste = \frac{s}{t}}$ [m.s^{-1}] $\mathbf{a = 0}$ [m.s^{-2}]



☑ Lois du MRUA

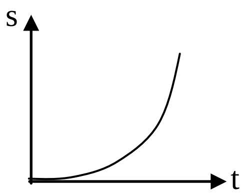
- Avec vitesse initiale nulle

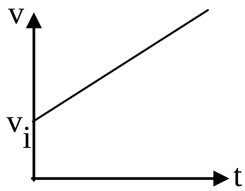
$\mathbf{s = \frac{a}{2}} \times t^2$ [m] $\mathbf{v = a \times t}$ [m.s^{-1}] $\mathbf{a = cste}$ [m.s^{-2}]

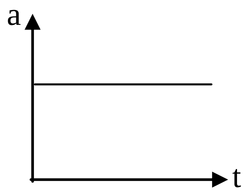


- <u>Avec vitesse initiale non nulle</u>

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a}}{2} \times t^2 + V_i \times t \ [\mathrm{m}] \qquad \mathbf{v_f = a \times t + v_i} \ [\mathrm{m.s^{-1}}] \qquad \mathbf{a = cste} \ [\mathrm{m.s^{-2}}]$$



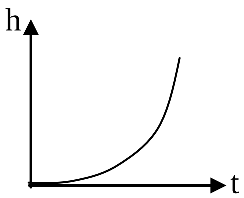


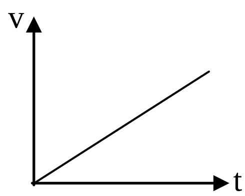


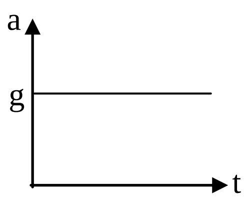
Par élimination de **t** entre l'équation horaire et celle de la vitesse : $\mathbf{v}_f^2 - \mathbf{v}_i^2 = 2\,\mathbf{a} \times \mathbf{s}$

☑ Lois de la chute libre *(cas particulier de MRUA)*

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{g}}{2} \times t^2 \ [\mathrm{m}] \qquad \mathbf{v = g \times t} \ [\mathrm{m.s^{-1}}] \qquad \mathbf{g = 9{,}8\ m.s^{-2}}$$ *(détermination récente)*







D'où l'on déduit : $\mathbf{t} = \sqrt{\frac{2 \times \mathbf{h}}{\mathbf{g}}}$ et $v = \sqrt{2 \times \mathbf{g} \times \mathbf{h}}$

II. <u>La notation vectorielle moderne</u>

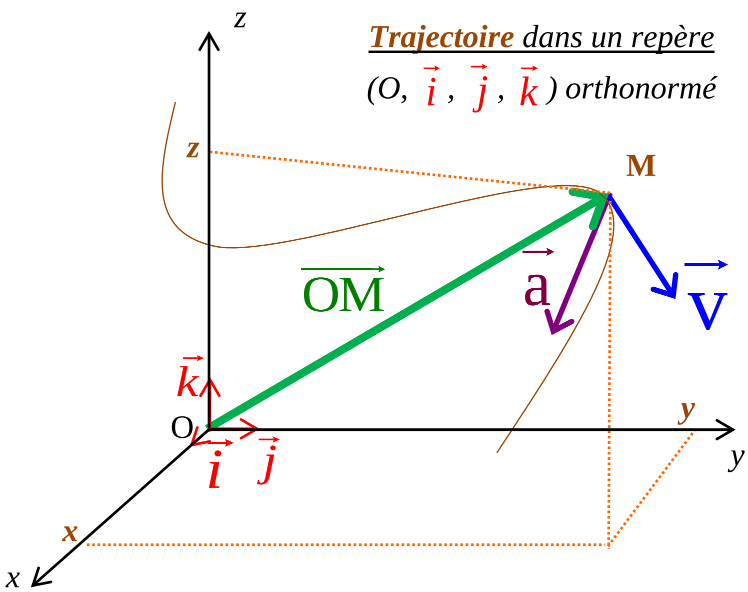
Bien que datant de la première moitié du XIX^e siècle, avec notamment Giusto Bellavitis *(ci-contre : Mathématicien italien 1803 - 1880, auteur de la formalisation des vecteurs par la notion de bipoint et d'équipollence)*, le contexte géométrique et algébrique du **vecteur** est en place dès le XVII^e siècle : Les illustrations des notes de Galilée sur la chute des corps montrent l'utilisation d'un repère.

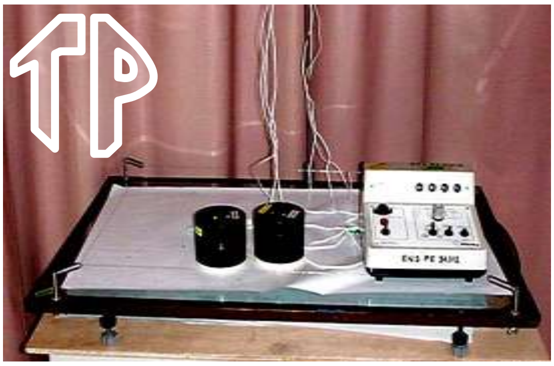
Isaac Newton (1643 - 1727) développe la **géométrie analytique** et l'utilise en astronomie, c'est l'origine de l'utilisation du « **vecteur** ». En France Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) l'emploi dans l'expression « *rayon vecteur* » également en astronomie. En latin « *vector* » désigne le « *conducteur d'un chariot* » mais son origine plus ancienne date de l'indo-européen et signifie chariot.

La position d'un point se modélise par ses trois coordonnées fonctions du temps ; on peut la décrire par le ***vecteur position*** de l'origine du repère au point. Le ***vecteur vitesse*** est égal à la dérivée du vecteur position (les coordonnées du vecteur vitesse sont les dérivées de celles du vecteur position). Il en est de même pour le ***vecteur accélération*** qui correspond à sa dérivée seconde.

On a donc :

- « **M** » point matériel mobile se déplaçant sur sa « **trajectoire** », ensemble de ses positions.





- $\overrightarrow{OM}$ « ***vecteur position*** »,
- $\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$ « équations horaires »,
- $f\,(x, y, z) = 0$ « équation de la trajectoire ».

1. Vecteur vitesse « instantanée »

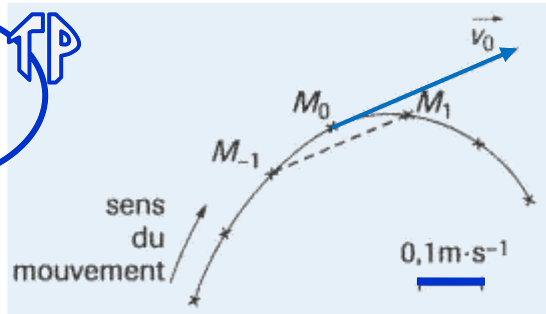
- $\vec{V} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$ « ***vecteur vitesse*** »

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_x(t) = \dfrac{d\,x}{dt} = \dot{x} \\ V_y(t) = \dfrac{d\,y}{dt} = \dot{y} \\ V_z(t) = \dfrac{d\,z}{dt} = \dot{z} \end{array} \right.$$

Le vecteur position $\vec{V}$ est tangent en M à la trajectoire, orientée dans le sens du mouvement, avec

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \text{ en m.s}^{-1}.$$

$$\vec{V}_0 = \frac{\overrightarrow{M_1M_{-1}}}{t_1 - t_{-1}}$$



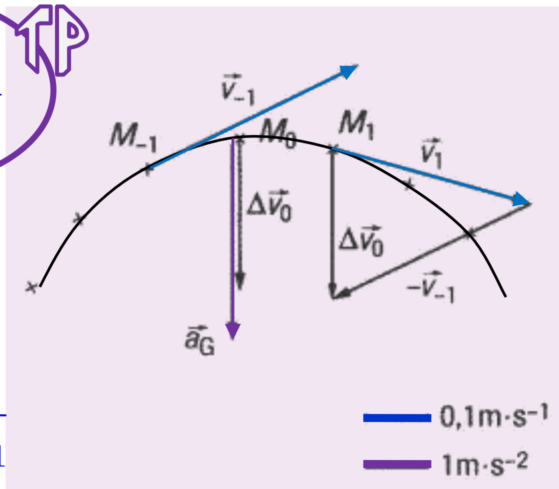
2. Vecteur accélération

- $\vec{a} = \dfrac{d\,\vec{V}}{dt}$ « ***vecteur accélération*** »

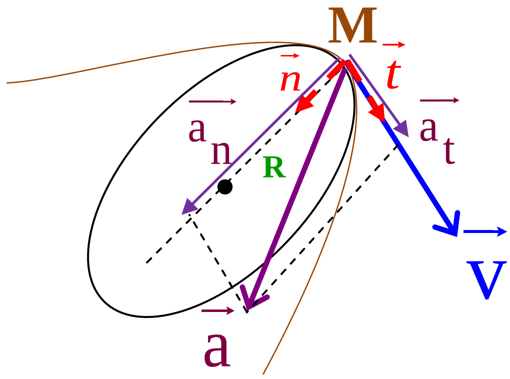
$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dfrac{d\,V_x}{dt} = \dfrac{d^2\,x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \dfrac{d\,V_y}{dt} = \dfrac{d^2\,y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \dfrac{d\,V_z}{dt} = \dfrac{d^2\,z}{dt^2} = \ddot{z} \end{array} \right.$$

$\vec{a}$ dirigé vers la concavité de la trajectoire avec $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ en m.s^{-2}.

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}_{-1}}{t_1 - t_{-1}}$$



3. *Repère de Frenet*



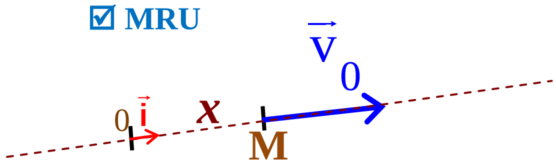
- $(M, \vec{t}, \vec{n})$ « **repère de Frenet** » en mouvement avec le mobile :

$$\vec{V} = V\,\vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$$

- $\vec{a_t}$ « ***accélération tangentielle*** » $a_t = \dfrac{dV}{dt}$,
  responsable de la variation de vitesse **V**.
- $\vec{a_n}$ « ***accélération normale*** » $\boxed{a_n = \dfrac{V^2}{R}}$,
  responsable de la courbure de la trajectoire.

$\vec{a}.\vec{V}$ indique si le mouvement accélère, ralentit ou bien est uniforme.

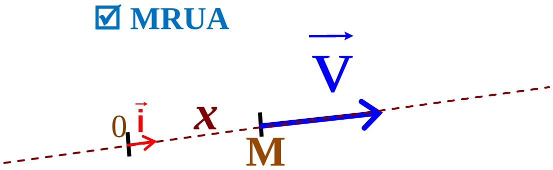
☑ **MRU**



Rectiligne : **R** est infini, $a_n = 0$
Uniforme : $\dfrac{dV}{dt} = 0$, $a_t = 0$

$$\vec{a} = \vec{0}$$

☑ **MRUA**



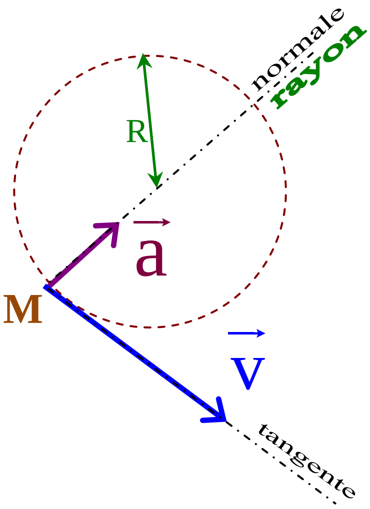
Rectiligne : **R** est infini, $a_n = 0$
Uniformément accéléré : $\dfrac{dV}{dt} =$ **cste**

$$\vec{a} = \overrightarrow{\textbf{cste}}$$

☑ **MCU**

Circulaire : **R** = **cste**, $a = \dfrac{V^2}{R}$
Uniforme: $\dfrac{dV}{dt} = 0$, $a_t = 0$

$$a = \text{cste}$$



Le mouvement est ***périodique*** :

$T = \dfrac{2\pi R}{V_0}$ période de rotation [s],

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ vitesse angulaire [rad.s^{-1}],

$V_0 = R\,\omega$ vitesse linéaire [m.s^{-1}].

$\dfrac{\ell}{2\pi R} = \dfrac{\alpha}{2\pi}$ soit $\ell = R\,\alpha$ [m] arc de cercle parcouru pour un angle α [rad].

III. Les fondements de la mécanique

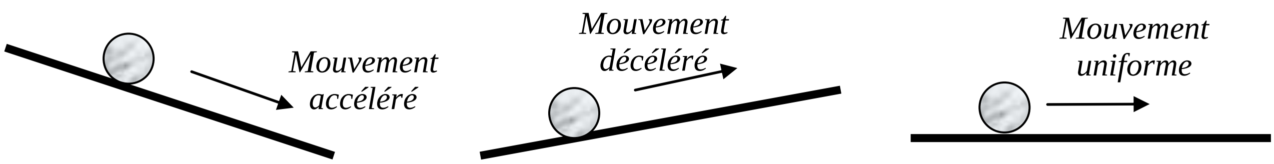
1. Le principe d'inertie

Comment accepter la verticalité de la chute des corps sur une Terre en mouvement ?

- **1613** ; **Isaac Beeckman** (1588 – 1637), physicien hollandais : « *Ce qui est une fois mis en mouvement, demeure en mouvement éternellement* ».

- **1638** ; **Galilée.** Bien que l'idée contraire à la mécanique aristotélicienne d'usage, soit présente dans le « *Discours* », le principe d'inertie n'est explicité dans aucune de ses œuvres :

    - Possibilité de mouvement sans action motrice « *la vitesse d'un corps n'est pas l'indice de la cause qui le meut* » (« *Dialogue* », allusion aux papillons et poissons … dans la cabine d'un bateau).
    - Principe d'inertie (§I.2. **Mouvement sur le plan incliné** : prémices du principe d'inertie (« *Discours* », Deuxième journée, expérience idéalisée car supposée sans frottement).



- **1641**, **Pierre Gassendi** (1592 – 1655), Chanoine savant et philosophe français : « ... *L'objet tombe au pied du mât comme l'avait prédit Galilée…* » lors d'une expérience en public _que Galilée n'a jamais faite_ dans le port de Marseilles sur une galère.

- **1664** (écrit entre 1629 et 1633), « *Traité du Monde et de la Lumière* » **; René Descartes** (1596 – 1650), philosophe, mathématicien et physicien français, exprime le *Principe de la conservation de la quantité de mouvement* (produit de la masse par la vitesse).

- **1687**, « Principes mathématiques de la philosophie naturelle » ; Isaac Newton (1642 – 1727), savant anglais :

(Premier énoncé précis du principe)

> « ***Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, sauf si des forces « imprimées » ne le contraignent à changer d'état.*** »

- **Albert Einstein** (1879 – 1955), physicien allemand, baptise « ***Principe d'Inertie de Galilée*** », la proposition suivante « *Ce qui est une fois mis en mouvement, demeure en mouvement éternellement* ».

2. Le principe de relativité

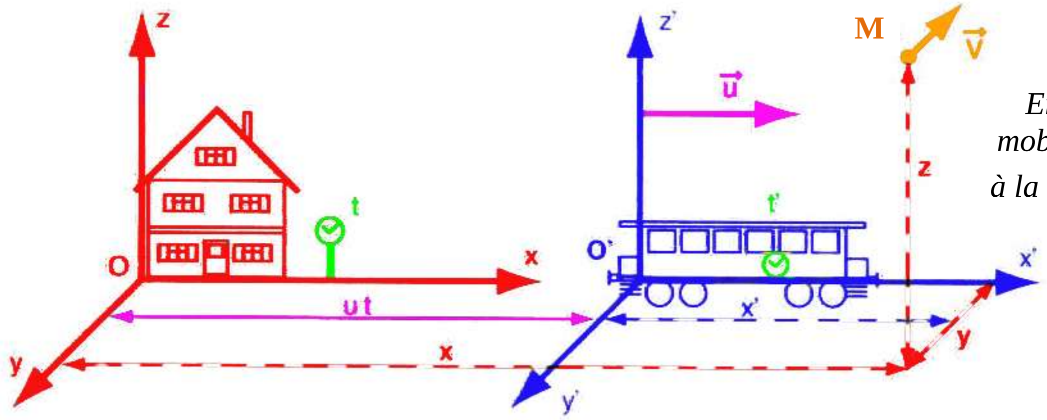
Les lois du mouvement ne sont pas modifiées lorsque le navire se déplace uniformément sur les flots. (« *Dialogue* », **Galilée**, expérience dans un bateau).

- **Newton** énonce le ***Principe de relativité*** : « *Les mouvements relatifs des corps enfermés dans un espace quelconque sont les mêmes que cet espace soit immobile ou qu'il se meuve uniformément le long d'une ligne droite, sans rotation.* »
- Expression actuelle du ***Principe de relativité*** :

« ***Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels en MRU les uns par rapport aux autres.*** »

« Espace » devient « ***référentiel*** », c'est-à-dire système de référence ou système de coordonnées par rapport auquel on observe.

Ces référentiels en MRU, équivalents selon le principe de relativité, sont appelés « *référentiels galiléens* » ou « *référentiels d'inertie* ».



*En **M**, un mobile évolue à la vitesse $\vec{V}$.*

*Le **train** se déplace en **MRU à vitesse constante** $\vec{u}$ par rapport à la **gare**.*
***Train** (**O'**, **x'**, **y'**, **z'**) et **gare** (**O**, **x**, **y**, **z**) sont confondus à t = 0s.*

Le dialogue entre « chef de gare » et « contrôleur du train » obéit aux « ***transformations de Galilée*** » :

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - u \times t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

*Coordonnées de **M** selon le référentiel.*

Relativité galiléenne
Relativité classique

Dont découlent les lois intuitives de « ***composition des vitesses*** » :

$$\begin{aligned} V'_x &= V_x - u \\ V'_y &= V_y \\ V'_z &= V_z \end{aligned}$$

Composantes de $\vec{V}$ selon le référentiel.

Le principe de relativité est plus général que le principe d'inertie qui en découle. En **1905**, **Albert Einstein** établit la « ***théorie de la relativité restreinte*** », basée sur les « ***transformations de Lorentz*** » et l' « ***espace-temps*** », étendue à toutes les lois de la nature et non aux seules lois de la mécanique.