II – LE CONDENSATEUR DANS TOUS SES ÉTATS (6,5 points)

Cet exercice se propose d'étudier le comportement d'un condensateur.

1[ère] partie

On réalise le circuit ci-contre (*schéma n° 1*) constitué d'un générateur de courant, d'un condensateur, d'un ampèremètre, et d'un interrupteur. Le condensateur est préalablement déchargé, et à la date t = 0 s, on ferme l'interrupteur K. L'ampèremètre indique alors une valeur constante pour l'intensité I = 12 µA.
Un ordinateur muni d'une interface (non représenté) relève, à intervalles de temps réguliers, la tension u_{AB} aux bornes du condensateur. Les résultats sont les suivants :

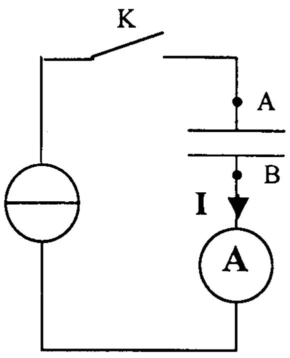


Schéma n° 1

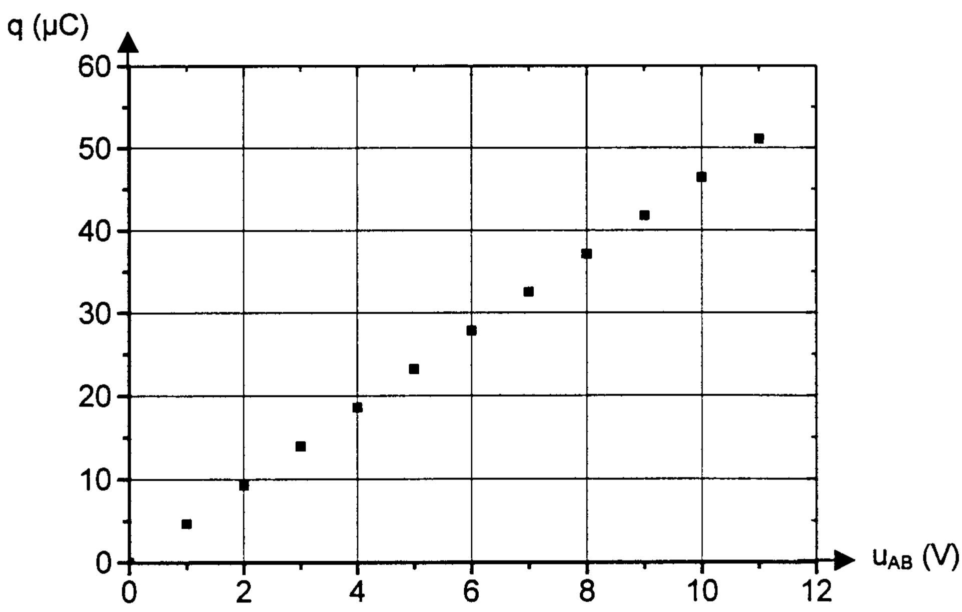
t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
u_{AB} (V)	0,00	1,32	2,64	4,00	5,35	6,70	7,98	9,20	10,6

Questions

1.1 Rappeler la relation permettant de calculer la charge q du condensateur en fonction de I. Calculer q à la date t = 3,0 s.

1.2 On a représenté (*graphe n° 1*) la courbe donnant la charge q du condensateur en fonction de u_{AB}. Déterminer à partir de cette dernière, par une méthode que l'on explicitera, la valeur de la capacité C du condensateur.

1.3 La valeur indiquée par le constructeur est C = 4,7 µF à 10 % près. La valeur obtenue est-elle en accord avec la tolérance du constructeur ?



graphe n° 1

2ème partie

On étudie maintenant la charge et la décharge d'un condensateur à travers un conducteur ohmique. Pour cela on réalise le montage suivant (*schéma n° 2*). Le condensateur est initialement déchargé, et à la date t = 0 s, on bascule l'interrupteur en position 1.

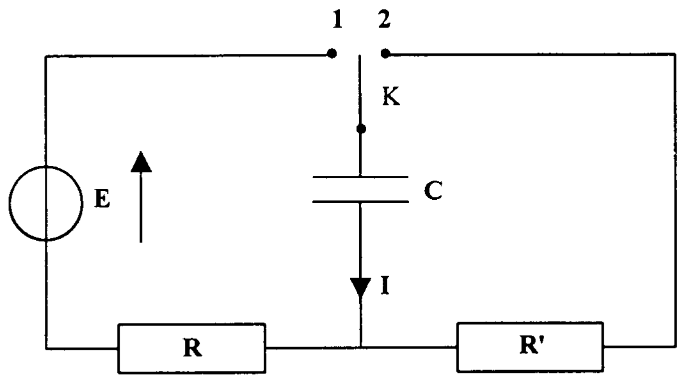


Schéma n° 2

Données : R = 2,2 kΩ ; C = 4,7 μF ; R' = 10 kΩ.

Questions

2.1 Etablir l'équation différentielle $E = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$ vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur pendant la phase de charge.

2.2 La solution analytique de cette équation est de la forme : $u_C = A(1 - e^{-\alpha t})$, compte tenu de la condition initiale relative à la charge du condensateur.
En vérifiant que cette expression est solution de l'équation différentielle, identifier A et α en fonction de E, R, C.

2.3 A partir du graphe n° 2, déterminer la valeur E.

2.4 La méthode d'Euler permet de calculer, pas à pas, les valeurs de u_C et de $\left(\frac{du_C}{dt}\right)$ à intervalles de temps réguliers choisis Δt. Si Δt est considéré comme suffisamment petit dans le cadre de l'expérience, on peut écrire : $u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \left(\frac{du_C}{dt}\right)_t \times \Delta t$. On choisit Δt = 1 ms.

a) A l'aide de l'équation différentielle établie à la question **2.1**, déterminer la valeur initiale de la dérivée notée : $\left(\frac{du_C}{dt}\right)_0$.

b) En appliquant la méthode d'Euler, compléter le tableau suivant (à refaire sur la copie) :

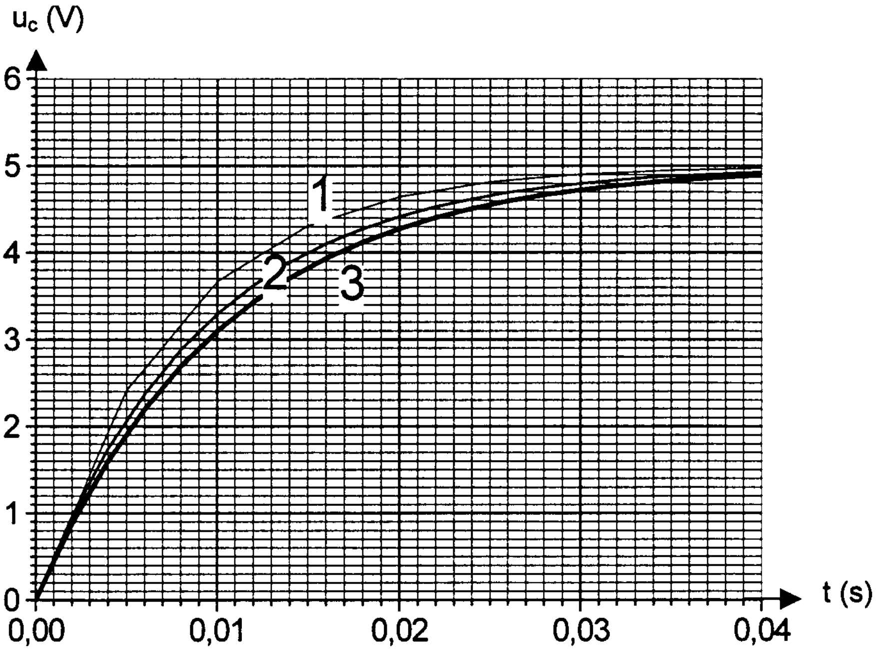
t (ms)	0	1	2	3
$u_C(t)$ (...)	0			
$\frac{du_C}{dt}$ (...)				

2.5 Sur le graphe 2, on a représenté trois courbes :

- Courbe n° 1: courbe obtenue par la méthode d'Euler avec un pas Δt = 5 ms,
- Courbe n° 2 : courbe obtenue par la méthode d'Euler avec un pas Δt = 2 ms,
- Courbe n° 3 : représentation de la solution analytique de l'équation différentielle.

a) Quelle est l'influence du pas Δt, utilisé dans la méthode d'Euler ?
b) Quels sont les avantages et les inconvénients d'avoir un Δt très grand ou très petit ?
c) Qu'entend-on à la question **2.4**, par "Si Δt est considéré comme suffisamment petit dans le cadre de l'expérience" ?

2.6 Définir la constante de temps du circuit. Déterminer sa valeur à partir du graphe n° 2 par une méthode que l'on explicitera. En déduire une nouvelle valeur expérimentale de C et la comparer à la valeur nominale.



graphe n° 2

2.7 On bascule alors l'inverseur en position 2. En justifiant, répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a) La durée de la décharge du condensateur est supérieure à celle de la charge.
b) La constante de temps du circuit lors de la décharge est égale à (R + R').C.

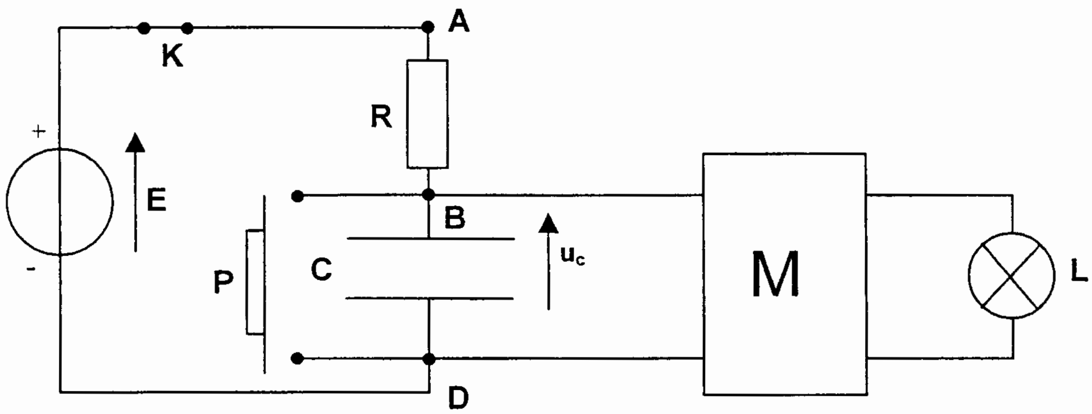
EXERCICE I : PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D'UNE MINUTERIE (7,5 points)

L'objet de cet exercice est d'étudier le principe de fonctionnement d'une minuterie permettant d'éteindre une lampe automatiquement au bout d'une durée t_0 réglable.

Le montage du circuit électrique est constitué :

- d'un générateur idéal de tension, de force électromotrice E = 30 V.
- d'un interrupteur K.
- d'un conducteur ohmique de résistance R.
- d'un condensateur de capacité C.
- d'un bouton poussoir P qui joue le rôle d'un interrupteur ; il est fermé seulement quand on appuie dessus.
- **d'un composant électronique M qui permet l'allumage de la lampe L tant que la tension aux bornes du condensateur est inférieure à une tension limite, caractéristique du composant, notée** U_ℓ (dans tout l'exercice on fixera U_ℓ à une valeur constante égale à 20 V).

Le composant électronique M possède une alimentation électrique propre (non représentée sur le schéma) qui lui fournit l'énergie nécessaire à l'allumage de la lampe.
De ce fait, on admettra que le composant électronique M ne perturbe pas le fonctionnement du circuit RC, **c'est-à-dire que la tension aux bornes du condensateur est identique que M soit présent ou non dans le circuit**.



I – Étude du circuit RC

A l'instant initial (t = 0 s), le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, le bouton poussoir P est relâché (voir schéma ci-dessus).

1. On souhaite visualiser les variations de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps à l'aide d'un oscilloscope à mémoire.
Indiquer les branchements à réaliser (voie 1 et masse) sur le schéma du **document 1 de l'annexe 1 page 9 à rendre avec la copie**.

2. Montrer que l'équation différentielle donnant les variations de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur en fonction du temps est de la forme :

$$u_C(t) + RC\frac{du_C(t)}{dt} = E$$

3. **a)** En vérifiant que la fonction du temps $u_c(t) = A\,(1 - e^{-t/\tau})$ est solution de l'équation différentielle précédente montrer que $A = E$ et $\tau = RC$.

b) Quelle est la valeur de u_c en régime permanent ?

c) Quel est le nom donné à la constante τ ?
A l'aide d'une analyse dimensionnelle, donner l'unité de la constante τ.

4. La représentation graphique de la fonction $u_c(t)$ est donnée dans le **document 2 de l'annexe 1 page 9, à rendre avec la copie**.
Faire apparaître sur ce graphe sans aucune justification :

- la tension E,
- la constante τ ,
- les régimes permanent et transitoire.

5. Calculer la valeur de la constante τ pour R = 100 kΩ et C = 200 µF.

6. **a)** Donner l'expression littérale de la date t_0 à laquelle la tension aux bornes du condensateur atteint la valeur limite U_ℓ en fonction de U_ℓ, E et τ. (t_0 est la durée d'allumage de la lampe).

b) Calculer la valeur de t_0 et vérifier la validité du résultat à l'aide du graphe $u_c(t)$ fourni dans le **document 2 de l'annexe 1 page 9 à rendre avec la copie**.

c) On a fixé U_ℓ à 20 V pour obtenir une durée d'allumage t_0 voisine de τ. Pour quelle raison choisir t_0 très supérieur à τ n'aurait pas été judicieux pour un tel montage ?

7. Quel(s) paramètre(s) du montage peut-on modifier sans changer le générateur afin d'augmenter la durée d'allumage de la lampe ?
En fixant C = 200 µF quelle valeur doit-on donner à la résistance R pour obtenir une constante de temps d'une minute ?

8. On appuie sur le bouton poussoir. Que vaut la tension aux bornes du condensateur ?
La comparer à U_ℓ. Que se passe-t-il pour la lampe dans les cas suivants :

a) la lampe est déjà allumée ?

b) la lampe est éteinte ?

II – Méthode d'Euler

On se propose maintenant de résoudre numériquement l'équation différentielle établie à la question I-2, R et C conservant les valeurs R = 100 kΩ et C = 200 µF.

1. A partir de cette équation différentielle, donner la relation entre la dérivée $\left(\frac{du_c(t)}{dt}\right)$ et la tension $u_c(t)$.

La méthode d'Euler permet de calculer successivement les valeurs de $u_c(t)$ et de $\left(\frac{du_c(t)}{dt}\right)$ à un intervalle de temps régulier Δt appelé le pas.

En prenant un pas suffisamment petit on peut écrire la relation :

$$u_c(t+\Delta t) = u_c(t) + \left(\frac{du_c(t)}{dt}\right).\Delta t.$$

Pour cette étude, on prend un pas égal à : $\Delta t = 2$ s.

2. En utilisant l'expression littérale ci-dessus, compléter dans le tableau donné en annexe **(document 3, annexe 1 page 9)** les colonnes correspondant aux dates t = 2 s et t = 4 s.

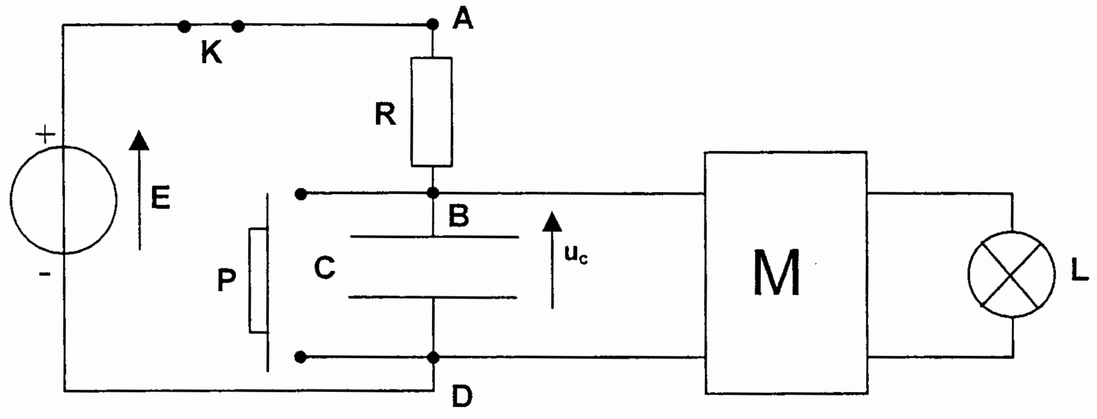
3. **Le document 4 de l'annexe 2 page 10** représente un agrandissement de la courbe $u_c(t)$ du document 2. Tracer sur ce document **à rendre avec la copie**, la partie du graphe $u_c(t)$ correspondant à ce tableau. Que constatez-vous ?

4. On peut améliorer la précision de la méthode d'Euler en modifiant la valeur du pas Δt.
Quelle modification pourrait-on apporter à la valeur du pas Δt ?
Quel serait l'inconvénient de cette modification ?

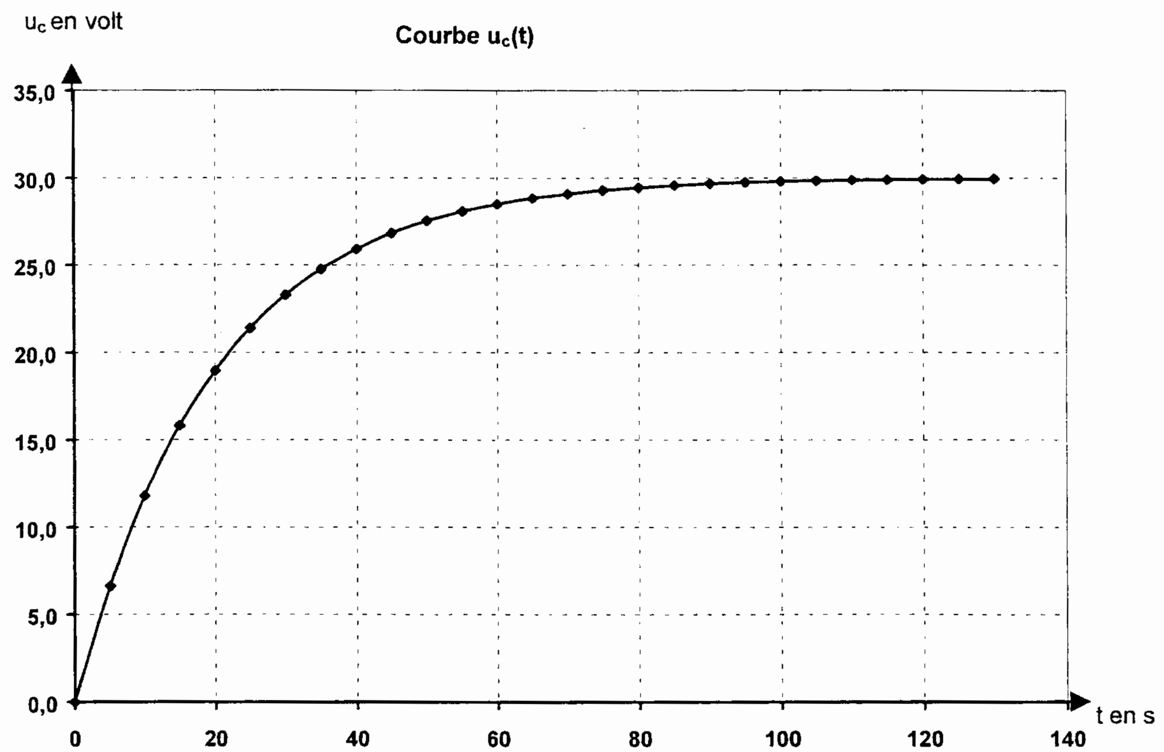
ANNEXE 1 : A RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE I :

Document 1



Document 2



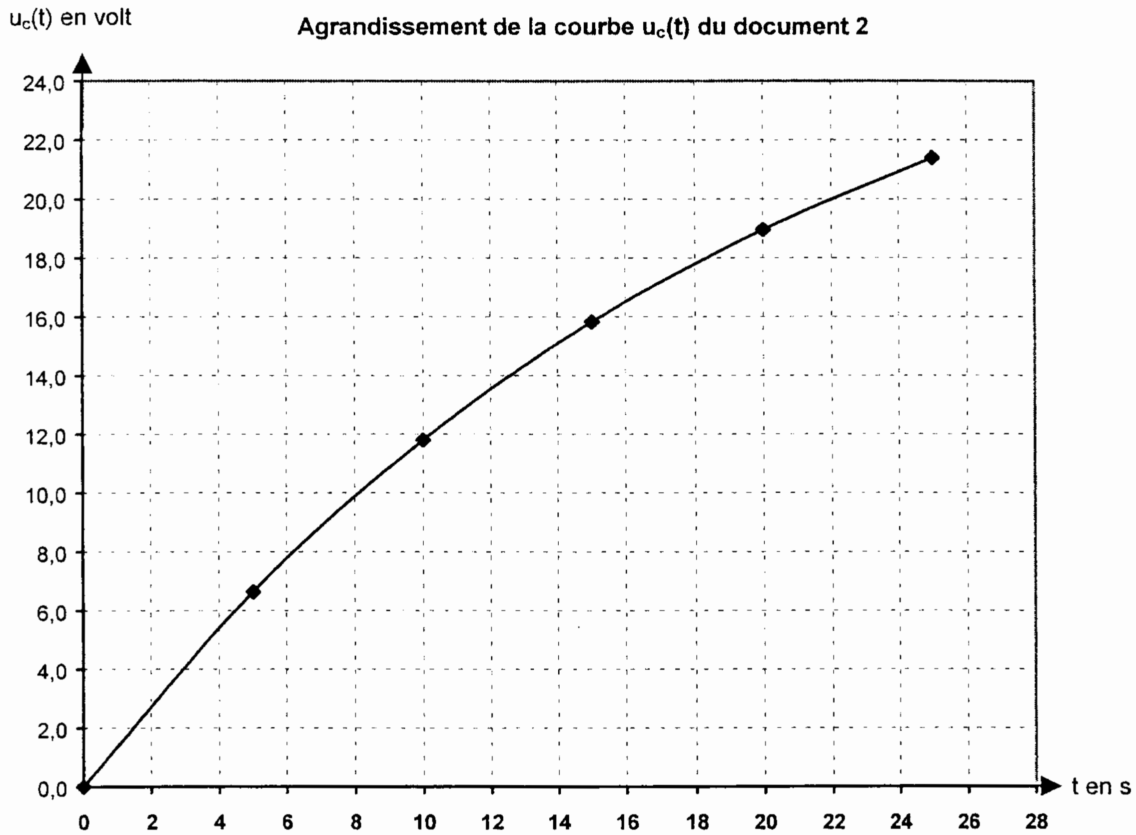
Document 3

t (s)	0	2	4	6	8	10	12	...	20
u_c (t)	0			8,14	10,3	12,3	14,1	...	19,6
$\left(\frac{du_c(t)}{dt}\right)$	1,50			1,09	0,99	0,89	0,80	...	0,52

2005 Polynésie

ANNEXE 2 : A RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE I : Document 4



EXERCICE III. AIRBAG ET CONDENSATEUR, QUEL RAPPORT ? (4 points)

Les technologies développées dans l'industrie microélectronique ont été transposées avec succès pour fabriquer des microsystèmes électromécaniques, c'est-à-dire des systèmes miniaturisés qui intègrent sur une même puce des parties mécaniques (capteurs d'accélération ou de pression, miroirs, micromoteurs) et des circuits électroniques associés.
Un des premiers microsystèmes à avoir été développé est l'accéléromètre. Il est entre autres utilisé pour déclencher le gonflage des airbags des véhicules en cas de choc brutal.
L'accéléromètre est constitué de deux pièces en forme de peignes complémentaires. L'une est fixe et constitue le cadre, l'autre est mobile à l'intérieur de ce cadre, suspendue par une lamelle flexible, sans contact entre les deux parties. L'ensemble constitue un condensateur. En cas de choc brutal du véhicule, la partie mobile se déplace par inertie dans le sens opposé au mouvement, comme le passager d'un bus qui est debout et se trouve projeté en avant quand le bus freine (voir ***figure 3****). Ce changement de distance entre le peigne mobile et le cadre modifie la capacité du condensateur. Dès que le circuit intégré détecte ce changement de capacité, il commande le gonflage de l'airbag, avant même que le conducteur et les passagers du véhicule ne soient projetés en avant.*

D'après « À la découverte du nanomonde » (www.nanomicro.recherche.gouv.fr) défis CEA et Internet.

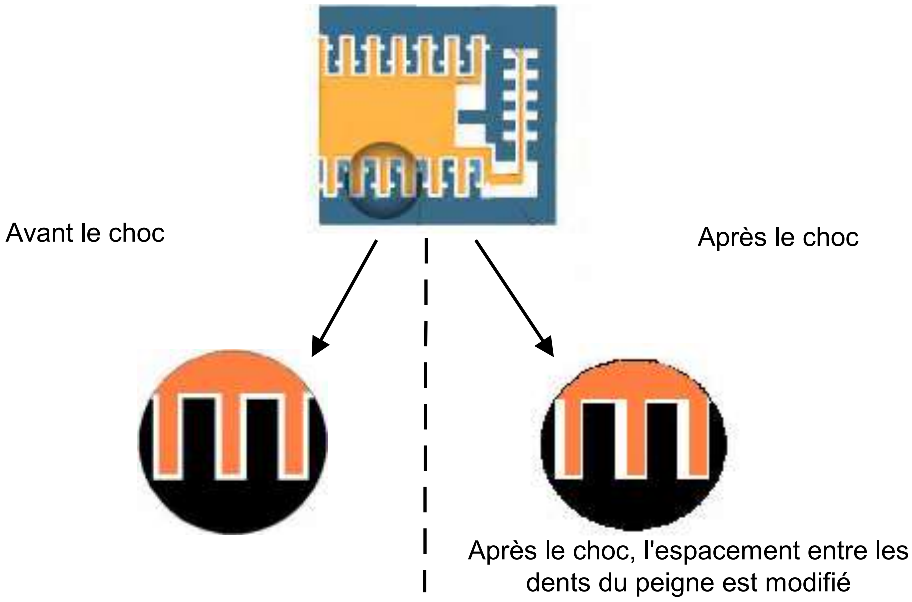


Figure 3 : Fonctionnement de l'accéléromètre et déclenchement d'airbag

Nous allons nous intéresser au principe de fonctionnement de ce dispositif. Le peigne mobile et le cadre constituent un condensateur de capacité C. Il est branché aux bornes d'une pile de résistance interne R et de force électromotrice E. Le circuit est modélisé par le schéma de la ***figure 4****.*

<u>Données :</u>
$C = 100$ pF (1 pF = 10^{-12} F).
$E = 5,0$ V

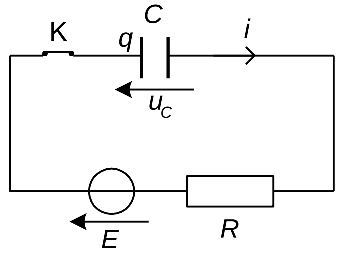


Figure 4

1. Comportement de l'accéléromètre en dehors de chocs

*La mise sous tension de l'accéléromètre revient à fermer l'interrupteur K du montage modélisant le dispositif représenté sur la **figure 4**.*
Le condensateur est déchargé avant la fermeture de l'interrupteur.
A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur.
*Les courbes représentant les variations de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant en fonction du temps sont données sur la **FIGURE 5 DE L'ANNEXE EN PAGE 10.***

1.1. Sur cette figure, identifier en justifiant qualitativement la courbe correspondant à la tension et celle correspondant à l'intensité.
1.2. Délimiter de façon approximative et qualifier, sur la **FIGURE 5 DE L'ANNEXE EN PAGE 10** les deux régimes de fonctionnement du circuit.
1.3. Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps du dipôle RC.
Comparer cette valeur à la durée d'un choc de l'ordre de 200 ms.
1.4. Donner l'expression littérale de cette constante de temps.
En déduire un ordre de grandeur de la valeur de la résistance R.
1.5. Charge du condensateur.
1.5.1. Déterminer graphiquement sur la **FIGURE 5 DE L'ANNEXE EN PAGE 10** les valeurs de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant en régime permanent.
1.5.2. En déduire, en régime permanent, la valeur de la charge q du condensateur définie sur la **figure 4**.

2. Déclenchement de l'airbag

2.1. D'après le texte encadré, comment se nomment les parties de l'accéléromètre correspondant aux armatures mobile et fixe ?

2.2. *Le rapprochement des deux armatures provoqué par un choc entraîne une augmentation de la capacité du condensateur* ***(FIGURE 6 DE L'ANNEXE EN PAGE 10).*** *Il s'agit de comprendre les conséquences de cette variation.*
En tenant compte du fait que la constante de temps est très faible, on considérera que la valeur de la résistance est nulle.

2.2.1. Parmi les deux propositions suivantes donnant l'expression de la capacité C en fonction de la distance d entre les armatures du condensateur, choisir en justifiant celle qui peut convenir :

a) $C = k \cdot d$; b) $C = \frac{k}{d}$

2.2.2. Donner l'expression de la tension aux bornes du condensateur u_C et de la charge q du condensateur avant le choc, en fonction de E (on pourra s'aider d'un schéma du circuit).
2.2.3. Justifier que la tension aux bornes du condensateur n'est pas modifiée par le choc. En déduire que le choc a pour effet de faire augmenter la charge q du condensateur.

2.3. Sur le schéma de **LA FIGURE 6 DE L'ANNEXE EN PAGE 10**, indiquer le sens de déplacement des électrons dans le circuit engendré par la variation de charge q du condensateur.

2.4. Donner la relation entre l'intensité i du courant et la charge q du condensateur.
Choisir parmi ces affirmations celle qui convient :
Le déclenchement du gonflage de l'airbag est commandé par la détection d'une variation :
a) de tension aux bornes du condensateur
b) d'intensité du courant dans le circuit
c) de tension aux bornes du générateur.

ANNEXE À RENDRE AGRAFÉE AVEC LA COPIE

ANNEXE DE L'EXERCICE III

Figure 5 : courbes d'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur et de l'intensité du courant

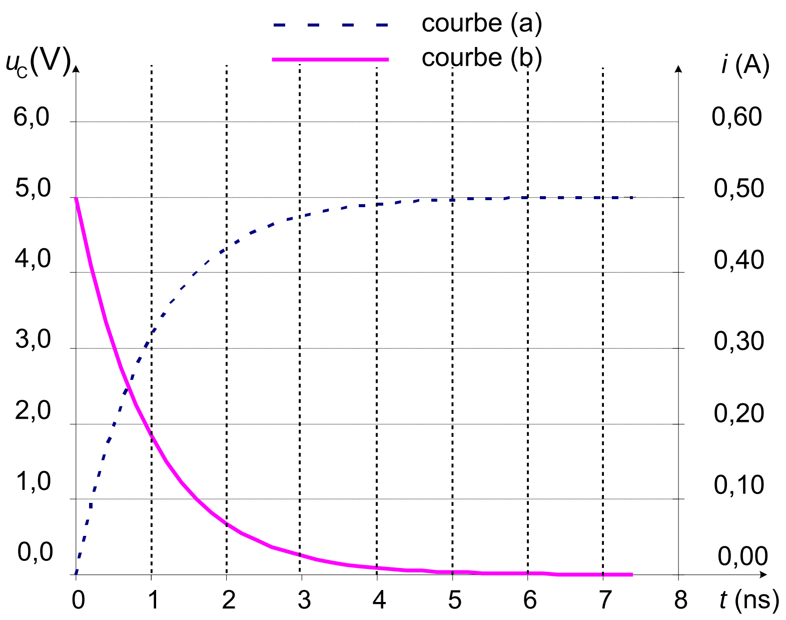
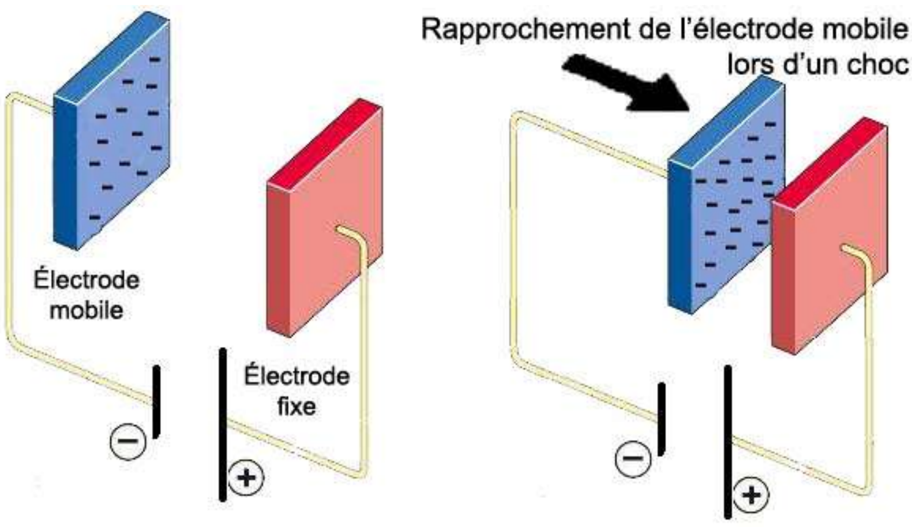


Figure 6 : rapprochement des deux armatures du condensateur lors d'un choc



a. avant le choc

b. pendant le choc